Université d'Orléans 4 Novembre 2011
Département de Mathématiques
M1MA06 Géométrie Différentielle

**Examen Partiel**

**Exercice 1**

On suppose que $E$ et $\underline{E}$ sont des espaces vectoriels réels de dimension finie.

1) Soit $Q$ [resp. $\underline{Q}$] une forme quadratique sur $E$ [resp. $\underline{E}$]. On suppose qu'il existe un isomorphisme $u : E \to \underline{E}$ tel que $Q = \underline{Q} \circ u$. Montrer que $Q$ et $\underline{Q}$ ont même signature.

2) Soit $U$ [resp. $\underline{U}$] un ouvert de $E$ [resp. $\underline{E}$] et $f : U \to \mathbf{R}$ [resp. $\underline{f} : \underline{U} \to \mathbf{R}$] deux fois dérivable en $a \in U$. On suppose qu'il existe un $C^2$-difféomorphisme $\varphi : U \to \underline{U}$ tel que $f = \underline{f} \circ \varphi$. On pose $\underline{a} = \varphi(a)$. Montrer que pour tous $h, k \in E$,

$$f''(a)(h,k) = \underline{f}''(\underline{a})(\varphi'(a)h, \varphi'(a)k) + \underline{f}'(\underline{a})(\varphi''(a)(h,k)).$$

3) En déduire que si $f'(a) = 0$, alors les hessiennes $H_a f$ et $H_{\underline{a}}\underline{f}$ ont même signature.

**Exercice 2**

Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ une courbe paramétrée régulière $C^\infty$ paramétrée par l'abscisse curviligne $s$. On note $\mathbf{T}(s)$ le vecteur unitaire tangent à $\gamma$ en $\gamma(s)$ et $\mathbf{N}(s)$ le vecteur déduit de $\mathbf{T}(s)$ par une rotation de $\pi/2$. On note $\kappa(s)$ la courbure algébrique de $\gamma$ en $\gamma(s)$.

1) Exprimer $\mathbf{T}'(s)$ et $\mathbf{N}'(s)$ en fonction de $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{N}(s)$ et $\kappa(s)$.

2) Etant donnée une fonction $\lambda : I \to \mathbf{R}$ de classe $C^\infty$, on définit la courbe paramétrée $\alpha : I \to \mathbf{R}^2$ par

$$\alpha(s) = \gamma(s) + \lambda(s)\mathbf{T}(s) \qquad \forall s \in I.$$

a) Calculer $\alpha'(s)$ ;

b) Déterminer toutes les fonctions $\lambda$ de classe $C^\infty$ telles que pour tout $s \in I$, $\alpha'(s)$ soit orthogonal à $\mathbf{T}(s)$. On dit alors que $\alpha$ est une courbe paramétrée *développante* de $\gamma$.

c) Déterminer les points $\alpha(s)$ où $\alpha$ est régulière.

3) Etant donnée une fonction $\mu : I \to \mathbf{R}$ de classe $C^\infty$, on définit la courbe paramétrée $\beta : I \to \mathbf{R}^2$ par

$$\beta(s) = \gamma(s) + \mu(s)\mathbf{N}(s) \qquad \forall s \in I.$$

a) Calculer $\beta'(s)$ ;

b) A quelle condition peut-on trouver une fonction $\mu : I \to \mathbf{R}$ telle que pour tout $s \in I$, $\beta'(s)$ soit orthogonal à $\mathbf{T}(s)$. La courbe $\beta$ s'appelle alors la *développée* de $\gamma$.

c) Donner une définition géométrique de la développée d'une courbe.

4) Avec les notations de la question 2), montrer que si une développante $\alpha$ de $\gamma$ est régulière, alors $\gamma$ est la développée de $\alpha$.

**Exercice 3**

Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ une courbe birégulière de classe $C^3$ paramétrée par l'abscisse curviligne. On note $(\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s))$ son trièdre de Frenet en $\gamma(s)$, $\kappa$ sa courbure et $\tau$ sa torsion. On suppose que $\tau(s) \neq 0$ et $\kappa'(s) \neq 0$ pour tout $s \in I$, et on pose $f = 1/\kappa, g = 1/\tau$.

1) On suppose que $\gamma(I)$ est tracée sur une sphère centrée en 0.

a) Montrer que

$$\gamma(s) = -f(s)\mathbf{N}(s) - f'(s)g(s)\mathbf{B}(s).$$

(On pourra dériver trois fois $\|\gamma(s)\|^2 = \text{cste}$).

b) En déduire que $f^2 + (f')^2 g^2 = \text{cste}$.

2) Réciproquement, on suppose que $f^2 + (f')^2 g^2 = \text{cste}$.

a) Montrer que

$$\gamma(s) + f(s)\mathbf{N}(s) + f'(s)g(s)\mathbf{B}(s)$$

ne dépend pas de $s$.

b) En déduire que $\gamma(I)$ est est tracée sur une sphère.