Université d'Orléans 15 Novembre 2010
Département de Mathématiques
M1MA06 Géométrie Différentielle

Examen Partiel

Exercice 1

Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ une courbe paramétrée birégulière C^∞ paramétrée par l'abscisse curviligne s. On fixe $s_0 \in I$. On note $\mathbf{T}$ le vecteur tangent à γ en $\gamma(s_0)$ et $\mathbf{N}$ l'unique vecteur de $\mathbf{R}^2$ tel que $(\mathbf{T}, \mathbf{N})$ soit une base orthormée positive de $\mathbf{R}^2$.

1) Soit s voisin de s_0. Donner les coordonnées dans le repère affine $(\gamma(s_0); \mathbf{T}, \mathbf{N})$ du centre $C(s)$ du cercle passant par les points $\gamma(s_0)$ et $\gamma(s)$ et qui est tangent à γ en $\gamma(s_0)$ (On exprimera les coordonnées $(x^*(s), y^*(s))$ de $C(s)$ en fonction des coordonnées $(x(s), y(s))$ de $\gamma(s)$.)

2) Montrer que ce centre tend vers le centre de courbure de γ en $\gamma(s_0)$ quand s tend vers s_0. (On utilisera un développement limité de $\gamma(s_0 + h)$).

On rappelle qu'une courbe paramétrée $\beta : I \to \mathbf{R}^2$ est la *développante* d'une courbe paramétrée $\alpha : I \to \mathbf{R}^2$ si pour tout $t \in I$, $\alpha(t)$ est le centre de courbure de β en $\beta(t)$. On rappelle aussi que, si γ est p.p.a.c., les développantes de γ sont de la forme

$$\beta(s) = \gamma(s) + (c - s)\gamma'(s).$$

3) Soit $\alpha : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}^2$ la courbe paramétrée $\alpha(t) = (t, \cosh t)$.

a) Déterminer une paramétrisation par l'abscisse curviligne γ de α.

b) Déterminer la développante β de la courbe α passant par le point $(0, 1)$ et dessiner ces deux courbes.

c) Montrer que la longueur de la portion de tangente à β comprise entre le point de contact et le point d'intersection avec l'axe Ox est constante.

Exercice 2

Dans $\mathbf{R}^3$, on désigne par D_ϵ, où $\epsilon \in \{-1, 1\}$, la droite d'équation $\begin{cases} z &= \epsilon \\ y &= \epsilon x \end{cases}$ et par $M_\epsilon(t)$ le point $M_\epsilon(t) = (t, \epsilon t, \epsilon)$. On note Δ_t la droite passant par $M_1(t)$ et par $M_{-1}(t)$.

1) Donner une paramétrisation $(s, t) \in \mathbf{R}^2 \mapsto \varphi(s, t)$ du sous-ensemble S de $\mathbf{R}^3$ engendrée par les droites Δ_t, $t \in \mathbf{R}$ telle que pour t fixé, $s \mapsto \varphi(s, t)$ soit une paramétrisation affine de la droite Δ_t vérifiant $\varphi(\epsilon, t) = M_\epsilon(t))$ pour $\epsilon = -1, 1$.

2) Donner une équation de S de la forme $f(x, y, z) = 0$

3) Prouver que S est une surface régulière de $\mathbf{R}^3$ homéomorphe à $\mathbf{R}^2$.

4) Déterminer le plan tangent à S au point $\varphi(s_0, t_0)$ et son intersection avec S.

5) Calculer l'aire de l'intersection de S avec $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + z^2 < 1\}$.

Exercice 3

Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ une courbe birégulière et de classe C^∞ paramétrée par l'abscisse curviligne s. On note $(\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s))$ son trièdre de Frenet en $\gamma(s)$. Pour $\epsilon > 0$, on note $D_\epsilon = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 : u^2 + v^2 < \epsilon^2\}$ le disque ouvert de rayon ϵ. On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que $\psi : I \times D_r \to \mathbf{R}^3$ définie par

$$\psi(s, u, v) = \gamma(s) + u\mathbf{N}(s) + v\mathbf{B}(s)$$

soit injective. On suppose aussi que $r \leq 1/K$ où K est un majorant de la courbure de γ.

1) Montrer que ψ est un difféomorphisme de classe C^∞ de $I \times D_r$ sur son image.

2) Montrer que l'application $\varphi : U = I \times]-r, r[\to \mathbf{R}^3$ définie par

$$\varphi(s, v) = \gamma(s) + v\mathbf{B}(s)$$

est une carte pour $S = \varphi(U)$.