Université d'Orléans 13 Novembre 2009
Département de Mathématiques
M1MA06 Géométrie Différentielle

Examen

Problème

Soient $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ une courbe paramétrée birégulière et $p \in \gamma(I)$. On note $(T(p), N(p), B(p))$ son trièdre de Frenet en p. On appelle *droite normale principale* en p la droite passant par p et de direction $N(p)$. On dit qu'une courbe birégulière C est une *courbe de Bertrand* s'il existe une courbe birégulière $\underline{C}$, disjointe de C, et des paramétrisations $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ de C et $\underline{\gamma} : I \to \mathbf{R}^3$ de $\underline{C}$ telles que pour toute valeur du paramètre $t \in I$, les droites normales principales de C en $\gamma(t)$ et de $\underline{C}$ en $\underline{\gamma}(t)$ coïncident. Une telle courbe $\underline{C}$ est appelée une *compagne de Jordan* de C.

1) Soient C est une courbe de Bertrand paramétrée par l'abscisse curviligne $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ et $\underline{C}$ une compagne de Jordan de C.

a) Montrer que $\underline{C}$ admet une paramétrisation de la forme

$$\underline{\gamma}(s) = \gamma(s) + \lambda(s)N(\gamma(s)),$$

où $\lambda(s) \in \mathbf{R}$.

b) Montrer que la fonction $s \mapsto \lambda(s)$ est constante.

c) Montrer que le vecteur tangent $\underline{T}(\underline{\gamma}(s))$ de $\underline{C}$ appartient au plan engendré par les vecteurs $T(\gamma(s))$ et $B(\gamma(s))$.

d) Montrer que $\underline{T}(\underline{\gamma}(s))$ fait un angle constant θ avec le vecteur $T(\gamma(s))$.

e) En déduire qu'une courbe de Bertrand C est ou bien planaire ou bien à torsion jamais nulle et que dans ce second cas il existe des constantes a et b telles que

$$a\kappa(s) + b\tau(s) = 1 \qquad (*)$$

où κ est la courbure et τ la torsion de C.

2) Montrer que, réciproquement, si la courbe birégulière C paramétrée par l'abscisse curviligne satisfait la condition $(*)$ de la question 1 e), alors la courbe paramétrée $\underline{\gamma}(s) = \gamma(s) + aN(\gamma(s))$ est une compagne de Jordan de C.

Exercice

Soient a et r deux nombres réels tels que $0 < r < a$. On note C le cercle de centre O et de rayon a du plan horizontal Oxy. On note $\mathbf{T}$ l'ensemble des points de $\mathbf{R}^3$ qui sont à la distance r de C.

1) Montrer les deux égalités :

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : (\sqrt{x^2+y^2}-a)^2 + z^2 = r^2\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : (x^2+y^2+z^2+a^2-r^2)^2 - 4a^2(x^2+y^2) = 0\}.\end{aligned}$$

2) En déduire que $\mathbf{T}$ est une surface régulière.

3) Soit φ l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^3$ telle que

$$\varphi(u,v) = ((a + r\cos u)\cos v, (a + r\cos u)\sin v, r\sin u).$$

Montrer que cette application est de classe C^∞ et qu'elle est une immersion (c'est-à-dire, sa différentielle est injective).

4) Montrer que $\varphi(\mathbf{R}^2) = \mathbf{T}$. Donner un atlas de cartes de $\mathbf{T}$ constituées de restrictions de φ.

5) Calculer les coefficients $(g_{i,j})$ de la première forme fondamentale de $\mathbf{T}$ dans ces cartes.