Université d'Orléans 11 Mars 2015
Département de Mathématiques
Géométrie Différentielle

Examen Partiel

Exercice 1

Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ une courbe paramétrée régulière C^∞ paramétrée par l'abscisse curviligne s. On note $\mathbf{T}(s)$ le vecteur unitaire tangent à γ en $\gamma(s)$ et $\mathbf{N}(s)$ le vecteur déduit de $\mathbf{T}(s)$ par une rotation de $\pi/2$. On note $\kappa(s)$ la courbure algébrique de γ en $\gamma(s)$.

1) Exprimer $\mathbf{T}'(s)$ et $\mathbf{N}'(s)$ en fonction de $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{N}(s)$ et $\kappa(s)$.

2) Etant donnée une fonction $\lambda : I \to \mathbf{R}$ de classe C^∞, on définit la courbe paramétrée $\alpha : I \to \mathbf{R}^2$ par

$$\alpha(s) = \gamma(s) + \lambda(s)\mathbf{T}(s) \qquad \forall s \in I.$$

a) Calculer $\alpha'(s)$;

b) Déterminer toutes les fonctions λ de classe C^∞ telles que pour tout $s \in I$, $\alpha'(s)$ soit orthogonal à $\mathbf{T}(s)$. On dit alors que α est une courbe paramétrée *développante* de γ.

c) Déterminer les points $\alpha(s)$ où α est régulière.

3) Etant donnée une fonction $\mu : I \to \mathbf{R}$ de classe C^∞, on définit la courbe paramétrée $\beta : I \to \mathbf{R}^2$ par

$$\beta(s) = \gamma(s) + \mu(s)\mathbf{N}(s) \qquad \forall s \in I.$$

a) Calculer $\beta'(s)$;

b) A quelle condition peut-on trouver une fonction $\mu : I \to \mathbf{R}$ telle que pour tout $s \in I$, $\beta'(s)$ soit orthogonal à $\mathbf{T}(s)$. La courbe β s'appelle alors la *développée* de γ.

c) Donner une définition géométrique de la développée d'une courbe.

4) Avec les notations de la question 2), montrer que si une développante α de γ est régulière, alors γ est la développée de α.

Exercice 2

Dans $\mathbf{R}^3$ on considére la sphère unité

$$\mathbf{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Le plan de l'équateur $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : z = 0\}$ sera identifié à $\mathbf{R}^2$ au moyen de l'application qui à $(x,y,0)$ associe (x,y) et à $\mathbf{C}$ par l'application qui associe à (x,y) le nombre complexe $z = x+iy$. On appelle pôle nord le point $N = (0,0,1)$. La projection stéréographique à partir du pôle nord est l'application θ_N qui à tout point $P \in \mathbf{S}^2 \setminus \{N\}$ associe le point d'intersection P' de la demi-droite issue de N passant par P et du plan de l'équateur.

1) Montrer que θ_N est une bijection de $\mathbf{S}^2 \setminus \{N\}$ sur $\mathbf{R}^2$.

2) Montrer que $\varphi_N = \theta_N^{-1} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{S}^2 \setminus \{N\}$ est une carte de $\mathbf{S}^2$.

3) On définit de même la projection stéréographique θ_S à partir du pôle sud $S = (0,0,-1)$; c'est une bijection de $\mathbf{S}^2 \setminus \{S\}$ sur $\mathbf{R}^2$. On définit la carte $\varphi_S = \theta_S^{-1} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{S}^2 \setminus \{S\}$. Montrer que (φ_N, φ_S) est atlas de $\mathbf{S}^2$. Préciser le domaine et l'image du changement de cartes h tel que $\varphi_N = \varphi_S \circ h$. Donner une expression de h en utilisant la notation complexe $z = x+iy$. L'atlas (φ_N, φ_S) est-il orienté ?

4) Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme non constant. On note aussi $P : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ l'application $z \mapsto P(z)$. On définit $f = \theta_N \circ P \circ \varphi_N$. C'est une application de $\mathbf{S}^2 \setminus \{N\}$ dans elle-même. Montrer que f se prolonge par continuité en une application g de $\mathbf{S}^2$ dans elle-même.

5) Montrer que g est une application différentiable de de $\mathbf{S}^2$ dans elle-même.

Exercice 3

Soit S une surface régulière de $\mathbf{R}^3$ admettant une carte locale $\phi : U \to \phi(U) \subset S$ où U est un ouvert de $\mathbf{R}^2$. Soit $\alpha : [a,b] \to U$ une courbe régulière C^1 à valeurs dans U. On pose $\gamma = \phi \circ \alpha$. On note $E = ||\frac{\partial \phi}{\partial u}||^2$, $F =< \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} >$ et $G = ||\frac{\partial \phi}{\partial v}||^2$.

On rappelle les formules de longueur et d'aire suivantes :

$\ell(\gamma) =^{def} \int_a^b ||\gamma'(t)||\, dt = \int_a^b \left(E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2\right)^{1/2} dt.$

Soit $R \subset U$. La formule de l'aire de $\phi(R)$, notée $\mathcal{A}(\phi(R))$, est donnée par :

$\mathcal{A}(\phi(R)) = \int_R ||\frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}||\, dudv = \int_R (EG - F^2)^{1/2}\, dudv.$

1. On pose $S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : (x,y,z) = (v\cos u, v\sin u, u), u \in]0,2\pi[, v > 0\}$. Soit $U =]0,2\pi[\times]0,\infty[$ et $\phi(u,v) = (v\cos u, v\sin u, u)$. Montrer que S est une surface régulière en montrant que (U,ϕ) est une carte (globale) de S.

2. Calculer les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale dans la carte (U,ϕ).

3. Montrer l'inégalité $\int_a^b ||\gamma'(t)||\, dt \geq \int_a^b ||\alpha'(t)||\, dt$ pour toutes les courbes γ et α liées par la relation $\gamma = \phi \circ \alpha$.

4. Soit $b > 0$ et $u_0 \in]0,2\pi[$. On pose $\alpha(t) = (u(t), v(t)) = (u_0, \sinh t)$ avec $t \in]0,b[$ et $\gamma_b = \phi \circ \alpha$. Calculer $\ell(\gamma_b)$.

5. Calculer l'aire $\mathcal{A}(\phi(R_b))$ avec $R_b = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 : u \in]0,2\pi[, 0 < v < \sinh b\}$. Puis montrer que l'on a : $\mathcal{A}(\phi(R_b)) \sim \pi\, [\ell(\gamma_b)]^2$ lorsque $b \to +\infty$. (On pourra faire un changement de variable et utiliser la relation $\cosh\theta = \sqrt{(\sinh\theta)^2 + 1}$.)