Université d'Orléans
Département de Mathématiques
M1MA06 Géométrie Différentielle

19 Mars 2013

Examen partiel

Problème

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. On dit qu'une courbe paramétrée birégulière dans E est une *hélice cylindrique* si son vecteur tangent fait un angle constant avec un vecteur fixe $\mathbf{w}$. Si $\alpha : I \to E$ est une courbe paramétrée birégulière, on note $(\mathbf{T}(t), \mathbf{N}(t), \mathbf{B}(t))$ son trièdre de Frénet au point $\alpha(t)$, $\kappa(t)$ sa courbure et $\tau(t)$ sa torsion en $\alpha(t)$. On note $\sigma : I \to \vec{E}$ la courbe paramétrée $t \mapsto \mathbf{T}(t)$; son image est contenue dans la sphère unité de $\vec{E}$ et on l'appelle l'*image sphérique* de α. Sa courbure sera notée κ_σ et sa torsion τ_σ.

1) On considère la courbe paramétrée $\alpha : t \mapsto (2t, t^2, \frac{t^3}{3})$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^3$, qu'on munit du produit scalaire, de l'orientation et de la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ canoniques.

a) Montrer que α est birégulière. Déterminer sa courbure et sa torsion en $\alpha(t)$ où $t \in \mathbf{R}$. On pourra utiliser les formules vues en TD :

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} \qquad \tau(t) = \frac{< \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t) >}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2}$$

b) Soit $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$. Calculer $< \mathbf{w}, \mathbf{T}(t) >$. En déduire que la courbe α est une hélice cylindrique. Quel est l'angle constant entre le vecteur tangent et le vecteur fixe ?

2) Dans cette question, on suppose que $\beta : I \to E$ est une hélice cylindrique paramétrée par l'abscisse curviligne et on prend le vecteur fixe $\mathbf{w}$ de longueur 1.

a) Montrer que $< \mathbf{w}, \mathbf{N}(s) >= 0$ pour tout $s \in I$.
b) Montrer qu'il existe un réel θ tel que $\mathbf{w} = (\cos\theta)\mathbf{T}(s) + (\sin\theta)\mathbf{B}(s)$ pour tout $s \in I$.
c) Montrer que θ n'est pas un multiple de π.
d) Montrer que $\tau/\kappa = \cos\theta/\sin\theta$ et donc que τ/κ est constant.

3) Réciproquement, montrer qu'une courbe birégulière $\beta : I \to E$ (qu'on supposera paramétrée par l'abscisse curviligne) telle que τ/κ est constant est une hélice cylindrique. (Indication : on étudiera le vecteur $\mathbf{w}(s) = (\cos\theta)\mathbf{T}(s) + (\sin\theta)\mathbf{B}(s)$ où $\tau/\kappa = \cos\theta/\sin\theta$.)

4) Montrer que l'image sphérique de la courbe α de la question 1) est contenue dans un cercle que l'on précisera (on demande un dessin !).

5) Soit β une courbe paramétrée birégulière. On admet les formules

$$\kappa_\sigma = \sqrt{1+(\tau/\kappa)^2} \quad \text{et que} \quad \tau_\sigma = \frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2}\frac{d}{ds}(\tau/\kappa).$$

En déduire que β est une hélice cylindrique si et seulement si son image sphérique est contenue dans un cercle.

Exercice

Soient a et r deux nombres réels tels que $0 < r < a$. On note C le cercle de centre O et de rayon a du plan horizontal Oxy. On note $\mathbf{T}$ l'ensemble des points de $\mathbf{R}^3$ qui sont à la distance r de C. (Faites un dessin !)

1) Montrer les deux égalités :

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : (\sqrt{x^2+y^2}-a)^2+z^2=r^2\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : (x^2+y^2+z^2+a^2-r^2)^2-4a^2(x^2+y^2)=0\}.\end{aligned}$$

2) En déduire que $\mathbf{T}$ est une surface régulière.

3) Soit φ l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^3$ telle que

$$\varphi(u,v) = ((a+r\cos u)\cos v, (a+r\cos u)\sin v, r\sin u).$$

Montrer que cette application est de classe C^∞ et qu'elle est une immersion (c'est-à-dire, sa différentielle est injective).

4) Montrer que $\varphi(\mathbf{R}^2) = \mathbf{T}$. Donner un atlas de cartes de $\mathbf{T}$ constituées de restrictions de φ.