Université d'Orléans 6 Janvier 2012
Département de Mathématiques
M1MA06 Géométrie Différentielle

Examen

Exercice 1

1) Soit $\gamma : I \to S$ un courbe p.p.a.c. géodésique d'une surface S orientée par un champ de vecteurs normaux $p \mapsto \mathbf{n}(p)$. On suppose que $\gamma(I)$ est contenue dans un plan. On oriente ce plan et on note $\mathbf{T}(s) = \gamma'(s)$ et $\mathbf{N}(s)$ le vecteur déduit de $\mathbf{T}(s)$ par une rotation de $\pi/2$ dans ce plan orienté.

a) Montrer que $\mathbf{N}(s) = \epsilon \mathbf{n}(\gamma(s))$, où $\epsilon \in \{1, -1\}$ est constant.

b) Montrer que pour tout $s \in I$, $\mathbf{T}(s)$ est un vecteur propre de l'endomorphisme de Weingarten $T_{\gamma(s)}\mathbf{n}$.

2) Soit S une surface régulière connexe orientée dont toutes les géodésiques sont planes. Montrer que tous ses points sont ombilicaux (on rappelle qu'un point p d'une surface régulière est ombilical si les courbures principales $\kappa_1(p), \kappa_2(p)$ en ce point sont égales).

Exercice 2

Soit S une surface régulière connexe orientée dont tous les points sont ombilicaux. On note $\kappa(p) = \kappa_1(p) = \kappa_2(p)$ la valeur commune des courbures principales au point $p \in S$. On note $\mathbf{n}(p)$ son vecteur normal au point $p \in S$. Soit $\varphi : U \to S$ une carte orientée, où U est un ouvert connexe de $\mathbf{R}^2$.

1) En utilisant le lemme de Schwarz pour les fonctions $\mathbf{n} \circ \varphi$ et φ, montrer que la fonction $\kappa \circ \varphi$ est constante sur U. On note encore κ cette constante.

2) Montrer que $\mathbf{n} \circ \varphi - \kappa\varphi$ est constant.

3) On suppose que $\kappa \neq 0$. On pose $R = 1/\kappa$ et $C = \varphi - R(\mathbf{n} \circ \varphi)$. Montrer que $\varphi(U)$ est contenue dans la sphère de centre C et de rayon R.

4) On suppose que $\kappa = 0$. Montrer que $\varphi(U)$ est contenue dans un plan.

5) Montrer que S est contenue dans une sphère ou dans un plan.

Exercice 3

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et $\gamma : I \to \mathbf{R^3}$ une courbe paramétrée C^∞ birégulière et paramétrée par l'abscisse curviligne. On note u le paramètre, $(\mathbf{T}(u), \mathbf{N}(u), \mathbf{B}(u))$ le trièdre de Frenet en $\gamma(u)$, $\kappa(u)$ la courbure et $\tau(u)$ la torsion de γ en $\gamma(u)$. Soit φ l'application de $I \times]0, +\infty[$ dans $\mathbf{R^3}$ définie par

$$\varphi(u, v) = \gamma(u) + v\mathbf{T}(u)$$

On suppose que pour tout couple de valeurs distinctes du paramètre $u_1 \neq u_2$, les demi-droites $\{\gamma(u_1) + v\mathbf{T}(u_1), v > 0\}$ et $\{\gamma(u_2) + v\mathbf{T}(u_2), v > 0\}$ ne se coupent pas.

1) Montrer que $(\varphi, I\times]0, +\infty[)$ est une immersion injective C^∞. On admet que φ est un homéomorphisme sur son image. Justifier que $\mathbf{S} = \varphi(I\times]0, +\infty[)$ est une surface régulière.

2) Montrer que le plan tangent à $\mathbf{S}$ est constant le long de la demi-droite $\{\varphi(u_0, v), v > 0\}$, où $u_0 \in I$ est fixé.

3) Calculer les coefficients de la première forme fondamentale de $\mathbf{S}$.

4) Calculer les coefficients de la deuxième forme fondamentale de $\mathbf{S}$.

5) Calculer les courbures principales en chaque point. Déterminer la nature des points de $\mathbf{S}$ (elliptiques, paraboliques ou hyperboliques).

6) Déterminer les courbes de $\mathbf{S}$ telle qu'en chaque point, la tangente est une direction principale (ces courbes s'appellent les lignes de courbure de $\mathbf{S}$).

7) Est-il plausible, d'après la courbure de Gauss K de $\mathbf{S}$, que $\mathbf{S}$ soit localement isométrique à un plan ?