Université d'Orléans 11 Janvier 2011
Département de Mathématiques
M1MA06 Géométrie Différentielle

Examen

Exercice 1

On munit $\mathbf{R}^n$ de son produit scalaire usuel, noté $< .,. >$ et de la norme euclidienne associée, notée $\|.\|$. On note respectivement $\mathbf{B}_n = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ et $\mathbf{S}^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| = 1\}$ la boule unité fermée et la sphère unité de $\mathbf{R}^n$.

1) Préciser les orientations usuelles de la boule ouverte $\overset{\circ}{\mathbf{B}}_n$ et de $\mathbf{S}^{n-1}$.

2) On rappelle que la forme volume de $\mathbf{S}^{n-1}$ est $\sigma = i^*\omega$ où $i : \mathbf{S}^{n-1} \to \mathbf{R}^n$ est l'inclusion et ω est la $(n-1)$-forme sur $\mathbf{R}^n$:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x^i dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^n$$

Montrer que $vol(\mathbf{S}^{n-1}) = n\ vol(B_n)$.

3) Montrer que l'intégrale $\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\|x\|^2} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ est bien définie et vaut I^n, où $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt$.

4) Soit $f\ :]0,\infty[\times \mathbf{S}^{n-1} \to \mathbf{R}^n$ telle que $f(r,u) = ru$. Montrer que f est un difféomorphisme de $]0,\infty[\times \mathbf{S}^{n-1}$ sur $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ préservant l'orientation.

5) Montrer que $f^*(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n) = r^{n-1} dr \wedge \sigma$ et que $f^*(e^{-\|x\|^2} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n) = e^{-r^2} r^{n-1} dr \wedge \sigma$.

6) Montrer que

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\|x\|^2} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \int_{]0,\infty[\times \mathbf{S}^{n-1}} e^{-r^2} r^{n-1} dr \wedge \sigma.$$

En déduire que $(\int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{n-1} dr) vol(\mathbf{S}^{n-1}) = I^n$.

7) Déduire de cette formule pour $n = 2$ que $I = \sqrt{\pi}$.

8) Déduire des questions précédentes les valeurs de $vol(\mathbf{S}^{n-1})$ et de $vol(B_n)$. On utilisera la formule (qu'on ne demande pas de démontrer) :

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{n-1} dr = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{n}{2}),$$

où $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$.

9) Expliciter les valeurs $vol(\mathbf{S}^2)$ et de $vol(B_3)$.

Exercice 2

Soit S une surface régulière dans $\mathbf{R}^3$. On dit qu'elle est *plate* si elle est localement isométrique à un plan euclidien. On dit que S est *réglée* si elle admet un atlas de cartes de la forme $\varphi(u,v) = \gamma(u) + vZ(u)$. Pour u fixé, $\varphi(u,v)$ décrit un segment de droite appelé une *génératrice* de S. On dit que S est *développable* si elle est réglée et si son plan vectoriel tangent est constant le long de chaque génératrice.

1) Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ une courbe birégulière paramétrée par l'abscisse curviligne s. On note $(T(s), N(s), B(s))$ son trièdre de Frénet en s et $\kappa(s), \tau(s)$ sa courbure et sa torsion. On considère la surface paramétrée réglée $\varphi(s,v) = \gamma(s) + vB(s)$.

a) On admet qu'il existe un voisinage ouvert U de $I \times \{0\}$ dans $\mathbf{R}^2$ tel que $\varphi : U \to \varphi(U)$ soit un homéomorphisme. Montrer que $S = \varphi(U)$ est une surface régulière.

b) Montrer que S est une surface développable si et seulement si la torsion de γ est identiquement nulle. Montrer que dans ce cas, S est plate.

c) Calculer les coefficients de la première et la deuxième formes fondamentales de S ainsi que la matrice de l'endomorphisme de Weingarten dans la base $(\partial\varphi/\partial s, \partial\varphi/\partial v)$. En déduire la courbure moyenne et la courbure de Gauss de S au point $\varphi(s,v)$.

d) Donner une condition nécessaire et suffisante sur la courbe γ pour que la courbure de Gauss de S soit identiquement nulle. En déduire qu'une telle surface réglée S est développable si et seulement si elle est plate.

2) Soit maintenant S une surface régulière réglée arbitraire.

a) On dit qu'un vecteur tangent non nul $X \in T_pS$, où $p \in S$, a une *direction asymptotique* si $L_p(X,X) = 0$. On dit qu'une courbe d'une surface S est *asymptotique* si en tout point sa tangente a une direction asymptotique. Montrer que tout segment de droite contenu dans S est une courbe asymptotique. En particulier, les génératrices de S sont des courbes asymptotiques. Montrer que la surface S ne possède pas des points elliptiques. En déduire que la courbure de Gauss de S est négative ou nulle en tout point.

b) On dit qu'un vecteur tangent non nul $X \in T_pS$ a une *direction principale* si il est vecteur propre de l'endomorphisme de Weingarten. Sa valeur propre est sa *courbure principale*. On dit qu'une courbe d'une surface S est une *ligne de courbure* si en tout point sa tangente a une direction principale. On suppose que S est développable. Montrer que les génératrices de S sont des lignes de courbure de courbure principale nulle . En déduire que la courbure de Gauss de S est nulle en tout point.

c) Réciproquement, on suppose que la courbure de Gauss de S est nulle en tout point. Montrer qu'alors les directions asymptotiques sont des directions propres de l'endomorphisme de Weingarten associées à la valeur propre 0. En déduire que le vecteur normal de S est constant le long des génératrices et que S est développable.