Université d'Orléans
Département de Mathématiques
M1MA06 Géométrie Différentielle

11 Janvier 2010

Examen

Problème

On oriente $\mathbf{R^2}$ par sa base canonique $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$. Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert et $\gamma : I \to \mathbf{R^2}$ une courbe régulière de classe C^∞ paramétrée par l'abscisse curviligne. Pour $s \in I$, on note $\mathbf{T}(s)$ le vecteur tangent unitaire de γ en s et $\mathbf{N}(s)$ le vecteur déduit de $\mathbf{T}(s)$ par une rotation de $\pi/2$.

1) Rappeler la définition de la courbure algébrique, notée $\kappa_a(s)$, de γ en s.

2) On écrit $\gamma(s) = (f(s), g(s))$ pour $s \in I$. Donner l'expression de $\mathbf{T}(s)$ et de $\mathbf{N}(s)$. Vérifier que

$$\begin{aligned} f''(s) &= - \kappa_a(s) g'(s) \\ g''(s) &= \kappa_a(s) f'(s). \end{aligned}$$

3) On suppose dans la suite que $f(s) > 0$ pour tout $s \in I$. On considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi : I \times \mathbf{R} &\to \mathbf{R^3} \\ (u, v) &\mapsto \varphi(u, v) = (f(u)\cos v, g(u), f(u)\sin v). \end{aligned}$$

Montrer, en donnant un atlas de cartes, que l'image S de φ est une surface régulière dans $\mathbf{R^3}$. Montrer que S est orientable. Fixer une orientation de S.

4) a) Calculer la première et la deuxième forme fondamentales de S.

b) Démontrer les égalités

$$K(u, v) = -\frac{f''(u)}{f(u)}, \quad H(u, v) = \frac{\epsilon}{2}\left[\kappa_a(u) + \frac{g'(u)}{f(u)}\right]$$

(où $\epsilon = \pm 1$ suivant le choix de l'orientation), K et H étant respectivement les courbures gaussienne et moyenne de S.

5) Dans cette question, on considère la courbe paramétrée $\alpha :]0, \pi/2[\to \mathbf{R^2}$ donnée par

$$\alpha(t) = (x(t) = \cos t,\, y(t) = \log(\tan(t/2 + \pi/4)) - \sin t)\,.$$

Calculer $\frac{ds}{dt}$, où s est l'abscisse curviligne. En déduire le calcul de la courbure de Gauss de la surface S construite à partir de cette courbe par le procédé décrit en 3).

6) On revient à la situation générale. Montrer que la courbure moyenne H de S est identiquement nulle si et seulement si f est solution de l'équation différentielle

$$f''f + f'^2 = 1.$$

Question facultative : si vous avez fait tout le reste, donner la solution générale de cette équation ; en déduire les courbes paramétrées par l'abscisse curviligne $u \mapsto (f(u), g(u))$ pour lesquelles $H \equiv 0$.

Exercice 1

1) Rappeler la définition d'une courbe géodésique d'une surface régulière dans $\mathbf{R}^3$.

2) Montrer que le cylindre C d'équation $x^2 + y^2 = 1$ est une surface régulière dans $\mathbf{R}^3$.

3) Donner une isométrie locale du plan $\mathbf{R}^2$ sur le cylindre C.

4) Montrer que pour tout $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, la courbe paramétrée

$$\alpha(t) = (\cos(at + b), \sin(at + b), ct + d)$$

est une géodésique du cylindre C. (Indication : on pourra utiliser 3).)

5) Montrer que les grands cercles d'une sphère sont des courbes géodésiques de la sphère.

Exercice 2

On considère l'hémisphère nord

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{et} \quad z \geq 0\}$$

et le cercle de l'équateur

$$\gamma = \{(x, y, 0) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

1) Donner les orientations standard de S et de γ. On supposera S et γ munis de ces orientations.

2) Calculer de deux manières l'intégrale $\int_\gamma \omega$ où ω est la 1-forme sur $\mathbf{R}^3$ donnée par $\omega = (x+y)dz + (y+z)dx + (z+x)dy$: d'une part par un calcul direct, d'autre part en utilisant S et la formule de Stokes.

3) Calculer $\int_S z^2 dx \wedge dy$ en choisissant une paramétrisation de S.