Université d'Orléans
Département de Mathématiques
M1MA06 Géométrie Différentielle

5 Janvier 2009

Examen

Exercice 1

On considère le cône $\underline{S} \subset \mathbf{R}^3$ d'équation $z = k\sqrt{x^2+y^2}$ avec $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $k > 0$. On note α le demi-angle au sommet (on a $0 < \alpha < \pi/2$ et $\tan\alpha = 1/k$). On considère aussi le secteur de $\mathbf{R}^2$

$$S = \{(r\cos\theta, r\sin\theta), \quad r > 0, \quad 0 < \theta < 2\pi\sin\alpha\}$$

1) Justifier que S et $\underline{S}$ sont des surfaces régulières.

2) On admet que $\varphi : U =]0,\infty[\times]0, 2\pi\sin\alpha[\to S$ telle que $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est une carte de S. Calculer les coefficients $(g_{i,j})$ de la première forme fondamentale de S dans cette carte.

3) On admet que $\underline{\varphi} : \underline{U} =]0,\infty[\times]0, 2\pi[\to \underline{S}$ telle que $\varphi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, ku)$ est une carte de $\underline{S}$.

a) Calculer les coefficients $(\underline{g}_{i,j})$ de la première forme fondamentale de $\underline{S}$ dans cette carte.

b) Calculer les coefficients $(\underline{L}_{i,j})$ de la seconde forme fondamentale de $\underline{S}$ dans cette carte.

c) Calculer les courbures principales et la courbure de Gauss de $\underline{S}$. D'après la courbure de Gauss, est-il plausible que $\underline{S}$ soit localement isométrique au plan ?

4) Montrer qu'il existe une application différentiable $f : S \to \underline{S}$ telle que

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = (r\sin\alpha\cos(\theta/\sin\alpha), r\sin\alpha\sin(\theta/\sin\alpha), r\cos\alpha).$$

Exprimer l'application "f lue dans les cartes (φ, U) et $(\underline{\varphi}, \underline{U})$" qu'on notera $\tilde{f} : U \to \underline{U}$.

5) Montrer que pour tout $(r,\theta) \in U$, on a $G(r,\theta) = {}^tJ\underline{G}(u,v)J$, où J est la matrice jacobienne de $\tilde{f}$ en (r,θ) et $G(r,\theta)$ [resp. $\underline{G}(u,v)$] est la matrice des $(g_{i,j}(r,\theta))$ [resp. des $(\underline{g}_{i,j}(u,v))$] et où $(u,v) = \tilde{f}(r,\theta)$.

6) En déduire que f est une isométrie de S dans $\underline{S}$.

7) Ecrire l'équation d'une géodésique joignant deux points $p = f(r_1\cos\theta_1, r_1\sin\theta_1)$ et $q = (f(r_2\cos\theta_2, r_2\sin\theta_2)$ de $\underline{S}$. Une telle géodésique existe-t-elle toujours ?

Exercice 2

Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ un courbe birégulière paramétrée par l'abscisse curviligne.

1) Rappeler les formules de Frenet. On notera $(\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s))$ le trièdre de Frenet de γ en $\gamma(s)$.

2) Montrer que $\gamma(I)$ est contenue dans un plan si et seulement si la torsion de γ est identiquement nulle.

3) On suppose que $\gamma(I)$ est contenue dans une surface régulière orientée S. On note $\mathbf{n}(p)$ le vecteur normal unitaire de S en p et $T_p\mathbf{n}$ l'endomorphisme de Weingarten. On suppose que γ est une courbe géodésique de S. Montrer que $\mathbf{n}(\gamma(s)) = \pm\mathbf{N}(s)$ et que le signe est constant sur I.

4) On suppose que γ est à la fois une courbe géodésique de S et une ligne de courbure de S (cela signifie que pour tout $s \in I$, il existe $\lambda(s) \in \mathbf{R}$ tel que $(T_{\gamma(s)}\mathbf{n})(\gamma'(s)) = \lambda(s)\gamma'(s)$). Montrer que $\gamma(I)$ est contenue dans un plan.

Exercice 3

Soit $\mathbf{S} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la sphère unité de $\mathbf{R}^3$ orientée par le vecteur normal sortant. On rappelle que son aire est 4π et que le volume de la boule qu'elle borde est $4\pi/3$.

Soit ω la forme différentielle définie sur $\mathbf{R^3} \setminus \{\mathbf{0}\}$ par

$$\omega = \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

1) Soit α une 1-forme différentielle sur $\mathbf{S}$. Montrer en utilisant la formule de Stokes que

$$\int_{\mathbf{S}^-} d\alpha = -\int_{\mathbf{S}^+} d\alpha,$$

où $\mathbf{S}^+$ et $\mathbf{S}^-$ sont respectivement les hémisphères nord et sud. En déduire que $\int_S d\alpha = 0$.

2) Montrer que la forme différentielle ω sur $\mathbf{R^3} \setminus \{\mathbf{0}\}$ définie plus haut est fermée.

3) Montrer que pour $U, V, W \in R^3$, on a l'égalité

$$det(U, V, W) = (W_1 dy \wedge dz + W_2 dz \wedge dx + W_3 dx \wedge dy)(U, V).$$

4) Calculer $\omega_p(U, V)$, où $p \in \mathbf{S}$ et (U, V) est une base orthonormée positive de $T_p\mathbf{S}$. En déduire que la restriction $\omega_{|\mathbf{S}}$ de ω à $\mathbf{S}$ est la forme de surface canonique de $\mathbf{S}$.

5) Evaluer $\int_{\mathbf{S}} \omega_{|\mathbf{S}}$ en utilisant la question 4.

6) Evaluer $\int_{\mathbf{S}} \omega_{|\mathbf{S}}$ en utilisant la formule de Stokes et la forme différentielle

$$\omega' = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$$

définie sur $\mathbf{R^3}$.

7) Déduire des questions précédentes que la forme différentielle ω sur $\mathbf{R^3} \setminus \{\mathbf{0}\}$ n'est pas exacte.