Université d'Orléans
Département de Mathématiques
M1MT07 Géométrie Différentielle

7 Janvier 2008

Examen

Exercice 1

Soit S le graphe d'une fonction C^∞ $f : U \to \mathbf{R}$, où U est un ouvert de $\mathbf{R^2}$.

1) Calculer les coefficients de la première forme fondamentale de S dans la carte φ donnée par $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$.

2) Calculer les coefficients de la deuxième forme fondamentale de S dans la carte φ. Comparer la matrice $[L]$ des coefficients de la deuxième forme fondamentale au point $(x, y, f(x, y))$ et la matrice hessienne $[H]$ de f en (x, y).

3) On suppose que f admet un maximum local en $(x_0, y_0) \in U$. Montrer que $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est ou bien un point elliptique, ou bien un point parabolique, ou bien un point planaire de S.

Exercice 2

1) On considère une fonction C^∞ $f : U \to \mathbf{R}$, où U est un ouvert de $\mathbf{R^3}$. Sous quelles conditions l'ensemble $f^{-1}(0)$ est-il une surface régulière dans $\mathbf{R}^3$?

2) Montrer que, dans chacun des cas suivants, l'ensemble défini par l'équation est une surface régulière (a, b et c sont des constantes) :

a) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$

b) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$

c) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1.$

3) Montrer que, sous les hypothèses de la question 1, la surface $S = f^{-1}(0)$ est orientable.

Exercice 3

On se donne $0 < r < a$ et on considère l'image S de l'application $\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ définie par :

$$\phi(u, v) = ((a + r\cos v)\cos u, (a + r\cos v)\sin u, r\sin v).$$

1) Montrer que S est une surface régulière en exhibant un atlas (on ne demande pas de vérifier les axiomes des cartes).

2) Calculer les coefficients de la première forme fondamentale de S et le vecteur normal sortant.

3) Montrer que les méridiens $u = u_0$ sont des géodésiques de S. Pour quelles valeurs de v_0 les parallèles $v = v_0$ sont-ils des géodésiques de S ?

4) Calculer les coefficients de la deuxième forme fondamentale de S.

5) Calculer l'intégrale $\int_S K d\sigma$ où K est la courbure de Gauss de S et $d\sigma$ est la forme de surface de S, où S est orientée par le vecteur normal sortant.

Exercice 4

1) Soit $D \subset \mathbf{R}^2$ un domaine borné à bord du plan. Déduire du théorème de Stokes que son aire est donnée par :

$$aire(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx$$

où ∂D est le bord orienté de D.

2) Vérifier directement cette formule dans le cas où D est la couronne

$$D = \{z \in \mathbf{C} : r \leq |z| \leq R\},$$

où $0 < r < R$, en calculant indépendamment les deux termes.

3) Soient $a > 0$ et C la courbe d'équation

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

décrite dans le sens trigonométrique. Donner une paramétrisation de C donnant la bonne orientation.

4) A l'aide de la formule de la question 1, calculer l'aire du domaine à l'intérieur de la courbe C.