Université d'Orléans 8 Janvier 2007
Département de Mathématiques
M1MT07

Examen

Problème

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et $\gamma : I \to \mathbf{R^3}$ une courbe paramétrée C^∞ birégulière et paramétrée par l'abscisse curviligne. On note u le paramètre, $(\mathbf{T}(u), \mathbf{N}(u), \mathbf{B}(u))$ le trièdre de Frenet en $\gamma(u)$, $\kappa(u)$ la courbure et $\tau(u)$ la torsion de γ en $\gamma(u)$. Soit φ l'application de $I \times]0, +\infty[$ dans $\mathbf{R^3}$ définie par

$$\varphi(u, v) = \gamma(u) + v\mathbf{T}(u)$$

On suppose que pour tout couple de valeurs distinctes du paramètre $u_1 \neq u_2$, les demi-droites $\{\gamma(u_1) + v\mathbf{T}(u_1), v > 0\}$ et $\{\gamma(u_2) + v\mathbf{T}(u_2), v > 0\}$ ne se coupent pas.

1) Montrer que $(\varphi, I \times]0, +\infty[)$ est une immersion injective C^∞. On admet que φ est un homéomorphisme sur son image. Justifier que $\mathbf{S} = \varphi(I \times]0, +\infty[)$ est une surface régulière.

2) Montrer que le plan tangent à $\mathbf{S}$ est constant le long de la demi-droite $\{\varphi(u_0, v), v > 0\}$, où $u_0 \in I$ est fixé.

3) Calculer les coefficients de la première forme fondamentale de $\mathbf{S}$.

4) Calculer les coefficients de la deuxième forme fondamentale de $\mathbf{S}$.

5) Calculer les courbures principales en chaque point. Déterminer la nature des points de $\mathbf{S}$ (elliptiques, paraboliques ou hyperboliques).

6) Déterminer les courbes de $\mathbf{S}$ telle qu'en chaque point, la tangente est une direction principale (ces courbes s'appellent les lignes de courbure de $\mathbf{S}$).

7) Est-il plausible, d'après la courbure de Gauss K de $\mathbf{S}$, que $\mathbf{S}$ soit localement isométrique à un plan ?

T.S.V.P.

Exercice 1

Soit $a > 0, b > 0$ et $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ la courbe paramétrée du plan donnée par $\gamma(t) = (ae^{bt}\cos t, ae^{bt}\sin t)$.

1) Montrer que γ est une courbe paramétrée régulière de classe C^∞.

2) Montrer que pour tout point $p = \gamma(t)$ de la courbe, l'angle entre Op et la tangente en p est constant.

3) Dessiner la courbe γ.

4) Calculer l'abscisse curviligne , mesurée à partir du point $O = \gamma(-\infty)$.

5) Calculer la courbure algébrique de cette courbe et montrer qu'elle est proportionnelle à l'inverse de l' abscisse curviligne calculée dans la question précédente.

6) Rappeler le théorème fondamental sur les courbes birégulières dans l'espace. Enoncer (sans démonstration !) un théorème analogue pour les courbes régulières dans le plan dont la courbure algébrique est donnée.

7) A l'aide du théorème précédent, déterminer toutes les courbes régulières de classe C^2 dont la courbure algébrique est proportionnelle à l'inverse de l'abscisse curviligne.

Exercice 2

On considère l'hémisphère

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{et} \quad z \geq 0\}$$

et le cercle

$$\gamma = \{(x, y, 0) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

1) Donner les orientations standard de S et de γ. On supposera S et γ munis de ces orientations.

2) Calculer de deux manières l'intégrale $\int_\gamma \omega$ où ω est la 1-forme sur $\mathbf{R}^3$ donnée par $\omega = (x+y)dz + (y+z)dx + (z+x)dy$: d'une part par un calcul direct, d'autre part en utilisant S et la formule de Stokes.

3) Calculer $\int_S z^2 dx \wedge dy$ en choisissant une paramétrisation de S.