LE THEOREME DE GAUSS

On a défini les courbures principales κ_1, κ_2 en tout point d'une surface régulière orientée. L'orientation opposée donne les courbures principales opposées $-\kappa_1, -\kappa_2$. Par conséquent, le produit $K = \kappa_1\kappa_2$ ne dépend pas de l'orientation et peut être définie pour toute surface régulière, orientée ou non. Par définition, K est la *courbure de Gauss* de la surface.

Théorème de Gauss. *La courbure de Gauss d'une surface régulière dans* $\mathbf{R}^3$ *ne dépend que de la première forme fondamentale.*

Ce résultat est remarquable. Il dit que la courbure de Gauss est intrinsèque, c'est-à-dire peut-être calculée en restant sur la surface, alors que sa définition fait intervenir le plongement de la surface dans $\mathbf{R}^3$ via le vecteur normal (c'est le déterminant de l'endomorphisme de Weingarten).

La démonstration consiste en un calcul. Comme la courbure de Gauss est définie localement, on utilise une carte (φ, U). Soit (g_{ij}) les coefficients de la première forme fondamentale dans cette carte. On va montrer que K s'exprime uniquement en termes des g_{ij} et de leurs dérivées partielles. Pour simplifier la présentation de ce calcul, on utilise quelques notations.

Notations

Omission du symbole de sommation (on somme sur les indices supérieur et inférieur répétés) :

$$a^i_j x^j = \sum_j a^i_j x^j.$$

Dérivées partielles :

$$f, i = \frac{\partial f}{\partial u^i}.$$

Démonstration

Soit $\varphi : U \subset \mathbf{R}^2 \to S \subset \mathbf{R}^3$ une carte. Comme d'habitude, on note $(u^1, u^2) = (u, v)$ le paramètre. On pose $e_i = \varphi_{,i}$ et $n = e_1 \wedge e_2 / \|e_1 \wedge e_2\|$. Comme (e_1, e_2, n) est une base de $\mathbf{R}^3$, on peut exprimer les vecteurs $e_{i,j}$ et $n_{,j}$ dans cette base :

$$e_{i,j} = \Gamma^k_{ij} e_k + \lambda_{ij} n$$

$$n_{,i} = a^j_i e_j + b_i n$$

Certains des coefficients apparaissant dans ces formules sont connus ou faciles à calculer. En faisant le produit scalaire avec n, la première ligne donne

$$< e_{i,j}|n >= \lambda_{ij}.$$

Or on a montré précédemment l'égalité

$$L_{ij} =< e_i|T_p n e_j >= - < e_{i,j}|n > .$$

On a donc

$$\lambda_{ij} = -L_{ij}.$$

Comme $n_{,i} = T_p n e_i$, on voit que d'une part $b_i = 0$ et d'autre part que $[a_i^j]$ est la matrice de l'endomorphisme de Weingarten $T_p n$ dans la base (e_1, e_2) de $T_p S$. Les seuls coefficients nouveaux sont les Γ_{ij}^k qu'on appelle *symboles de Christoffel*. On les calcule de la manière suivante. En faisant le produit scalaire avec e_l, la première ligne donne

$$< \Gamma_{ij}^k e_k|e_l >=< e_{i,j}|e_l >$$

En dérivant l'équation $g_{ij} =< e_i|e_j >$ on obtient

$$g_{ij,k} =< e_{i,k}|e_j > + < e_{j,k}|e_i > \quad (1)$$
$$g_{jk,i} =< e_{j,i}|e_k > + < e_{k,i}|e_j > \quad (2)$$
$$g_{ki,j} =< e_{k,j}|e_i > + < e_{i,j}|e_k > \quad (3)$$

La combinaison linéaire $-(1) + (2) + (3)$ donne :

$$-g_{ij,k} + g_{jk,i} + g_{ki,j} = 2 < e_{i,j}|e_k > .$$

D'où

$$\Gamma_{ij}^k = g^{kl} < e_{i,j}|e_l >= \frac{g^{kl}}{2}(-g_{ij,l} + g_{jl,i} + g_{li,j}).$$

Ensuite, on développe les équations suivantes qui résultent du théorème de Schwarz sur les dérivées mixtes :

$$e_{i,j,k} = e_{i,k,j}$$

On obtient les équations de Gauss :

$$L_{ij}a_k^l - L_{ik}a_j^l = \Gamma_{ij,k}^l - \Gamma_{ik,j}^l + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{mj}^l$$

et les équations de Mainardi-Codazzi :

$$L_{ij,k} - L_{ik,j} = \Gamma_{ij}^m L_{mk} - \Gamma_{ik}^m L_{mj}.$$

Regardons de plus près les équations de Gauss. Le terme de droite

$$R_{ijk}^l = \Gamma_{ij,k}^l - \Gamma_{ik,j}^l + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{mj}^l$$

ne dépend que des coefficients de la première forme fondamentale. On peut extraire la courbure de Gauss du terme de gauche. En effet, la relation $[L] = [G][K]$ donne

$$L_{ij} = g_{il} a^l_j$$

En remplaçant et en inversant $[G]$, on obtient

$$a^m_j a^l_k - a^m_k a^l_j = g^{mi} R^l_{ijk}.$$

En prenant $j = m = 1$ et $k = l = 2$, on obtient

$$K = a^1_1 a^2_2 - a^1_2 a^2_1 = g^{1i} R^2_{i12}.$$