Université d'Orléans 25 mars 2015
Département de Mathématiques
M1MA06

Feuille d'exercices n^0 6

Exercice 1

On se donne $a > 0$ et $\gamma : [-\pi/4, \pi/4] \to \mathbf{R}^2$ définie par

$$\gamma(t) = (a\cos t\sqrt{\cos 2t}, a\sin t\sqrt{\cos 2t}).$$

Calculer

$$\int_\gamma \frac{xy(ydx - xdy)}{x^2 + y^2}.$$

Exercice 2

Soit $r > 0$. On note S la surface régulière définie commme surface paramétrée par l'application φ de $]-\pi, \pi[\times]-\pi/2, \pi/2[$ dans $\mathbf{R}^3$ donnée par

$$\varphi(u, v) = (r\cos u\cos v, r\sin u\cos v, r\sin v).$$

Calculer

$$\int_S yzdy \wedge dz + zxdz \wedge dx + xydx \wedge dy.$$

Exercice 3

Dans $\mathbf{R}^3$ on considère la sphère $\mathbf{S}^2$ de centre O et de rayon 1 avec son orientation naturelle. Déterminer la forme volume sur $\mathbf{S}^2$.

Exercice 4

Soit ω la forme différentielle définie sur $\mathbf{R}^3 \setminus \{O\}$ par

$$\omega = \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Montrer que ω est fermée mais non exacte.

Exercice 5

Soit $r > 0$ et $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \text{ et } x^2 + (y - r)^2 < r^2\}$. Montrer que S est une surface orientable. Choisir une orientation et calculer $\int_S dy \wedge dz$.

Exercice 6

Soient $0 < a < b$. Calculer l'aire de la frontière S de l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ tels que $x^2 + y^2 \leq a^2$ et $x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2$.

Exercice 7

Calculer $\int_C (y^2 + z^2)dx + (z^2 + x^2)dy + (x^2 + y^2)dz$ où

$$C = \{x^2 + y^2 = 2pz\} \cap \{ax + by + cz + d = 0\}$$

Exercice 8

Soit $g = (g_1, \ldots, g_n)$ une application de classe C^2 d'un voisinage de la boule unité fermée de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans la sphère unité $\mathbf{S}^{n-1}$. Calculer les intégrales

$$\int_{\mathbf{S}^{n-1}} g_1 dg_2 \wedge \ldots \wedge dg_n \text{ et } \int_{\mathbf{S}^{n-1}} x_1 dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

($\mathbf{S}^{n-1}$ ayant l'orientation usuelle). En déduire qu'il n'existe pas de telle application g dont la restriction à $\mathbf{S}^{n-1}$ soit l'application identique.

Exercice 9

Si B_n désigne la boule unité dans $\mathbf{R}^n$, montrer que

$$vol(\mathbf{S}^{n-1}) = n vol(B_n).$$

Exercice 10

Soit S un domaine à bord du plan $\mathbf{R}^2$. On oriente S et son bord ∂S par les orientations usuelles. Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbf{R}^2$ telle que $f_{|\partial S} = 0$. Démontrer la formule

$$\int_S f\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big) dx \wedge dy = -\int_S \Big[\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)^2\Big] dx \wedge dy.$$

En déduire que si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ sur S, alors $f_{|S} = 0$.

Exercice 11

Calculer le volume et l'aire de la portion d'une sphère de $\mathbf{R}^3$ comprise entre deux plans parallèles. Remarquer que l'aire de la zone ne dépend que de la distance entre les deux plans.

Exercice 12

On considère dans $\mathbf{R}^3$ la forme différentielle

$$\omega = xdy \wedge dz + yf(y)dz \wedge dx - 2zf(y)dx \wedge dy$$

où f est une application de classe C^∞ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $f(1) = 1$.

a) Déterminer f pour que $d\omega = dx \wedge dy \wedge dz$. Pour ce choix de f, calculer l'intégrale $\int_S \omega$, où S désigne la calotte sphérique

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1; \quad z \geq \sqrt{2}/2$$

orientée de telle que sorte que la normale soit dirigée vers l'extérieur de la sphère.

b) Déterminer f pour que $d\omega = 0$. Pour ce choix de f, reprendre le calcul de l'intégrale $\int_S \omega$.

c) Déterminer f pour qu'il existe une forme

$$\alpha = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy$$

avec $P(x, y, 0) = Q(x, y, 0) = 0$ et $d\alpha = \omega$. Calculer alors $\int_C \alpha$ où C est la circonférence

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1; \quad z = \sqrt{2}/2$$

orientée de façon à être le bord orienté de S.

Exercice 13

Soit S un domaine à bord du plan $\mathbf{R}^2$. On oriente S et son bord $C = \partial S$ par les orientations usuelles. On fixe un point $z_0 \in S \setminus C$ et on considère une fonction f de classe C^1 définie sur un voisinage ouvert Ω de S. Pour $\epsilon > 0$, on note D_ϵ le disque ouvert centré en z_0 et de rayon ϵ et on suppose ϵ suffisamment petit pour que D_ϵ soit contenu dans S. Le cercle de centre z_0 et de rayon ϵ est noté C_ϵ. Enfin on note S_ϵ le complémentaire de D_ϵ dans S.

a) Montrer que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{C_\epsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2i\pi f(z_0).$$

b) On note ω la 1-forme différentielle $\dfrac{f(z)}{z - z_0} dz$ définie sur $\Omega \setminus \{z_0\}$. Montrer que

$$2i \int_{S_\epsilon} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \frac{dx \wedge dy}{z - z_0} = \int_\Gamma \omega - \int_{\Gamma_\epsilon} \omega.$$

En déduire que $\displaystyle\int_S \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \frac{dx \wedge dy}{z - z_0}$ existe et vérifie

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{\pi} \int_M \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \frac{dx \wedge dy}{z - z_0}.$$

c) Montrer que si f est une fonction holomorphe sur Ω, alors

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$