Université d'Orléans
Département de Mathématiques
M1MT06

18 Mars 2015

Feuille d'exercices n^0 5

Exercice 1

Montrer que $M \subset \mathbf{R}^n$ est une variété de dimension p si et seulement si pour tout $x \in M$, il existe un voisinage U de 0 dans $\mathbf{R}^n$, un voisinage W de x dans $\mathbf{R}^n$ et un difféomorphisme $\Phi : U \to W$ tels que $\Phi(U \cap \mathbf{R}^p \times 0) = W \cap M$.

Exercice 2

Soient $p, q \in \mathbf{N}$ et $n = p + q$. Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^p$ et $f : U \to \mathbf{R}^q$ une application C^∞.

1. Montrer que le graphe M de f est une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ de dimension p.
2. Déterminer l'espace vectoriel tangent de M en tout point $(x, f(x))$ de M.

Exercice 3

Soient $p, q \in \mathbf{N}$ et $n = p + q$. Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $F : U \to \mathbf{R}^q$ une application C^∞. On suppose que $M = F^{-1}(0)$ est non vide et que pour tout $w \in M$, la différentielle $F'(w) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^q$ est surjective (on dit que 0 est une valeur régulière de F).

1. Montrer que M est une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ de dimension p.
2. Déterminer l'espace vectoriel tangent de M en tout point w de M.

Exercice 4

Montrer que les ensembles suivants de $\mathbf{R}^{n^2}$ sont des sous-variétés et donner leur dimension :

$$\begin{aligned}
GL(n, \mathbf{R}) &= \text{ensemble des matrices réelles } n \times n \text{ inversibles}\\
SL(n, \mathbf{R}) &= \text{ensemble des matrices réelles } n \times n \text{ de déterminant } 1\\
O(n, \mathbf{R}) &= \text{ensemble des matrices } n \times n \text{ orthogonales}\\
O^+(n, \mathbf{R}) &= \text{ensemble des matrices } n \times n \text{ orthogonales de déterminant } 1
\end{aligned}$$

Exercice 5

On a vu (exercice précédent) que $SL(2, \mathbf{R})$ peut être considéré comme une sous-variété de dimension 3 de $\mathbf{R}^4$.

a) Montrer que pour tout arc paramétré $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_3(t) & x_4(t) \end{pmatrix}$ tracé sur $SL(2,\mathbf{R})$, avec $\gamma(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $x_1'(0) + x_4'(0) = 0$.

b) Montrer que l'espace tangent à $SL(2,\mathbf{R})$ en $p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ s'identifie naturellement à l'espace des matrices 2×2 de trace nulle.

c) Quel est l'espace tangent à $SL(2,\mathbf{R})$ en $q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?

Exercice 6

Déterminer les espaces tangents en la matrice identité pour les sous-variétés $GL(n,\mathbf{R})$, $SL(n,\mathbf{R})$ et $O(n,\mathbf{R})$.

Exercice 7 (voir par exemple [Far])

Etant donné G sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbf{R})$, on définit

$$\mathcal{G} = \{X \in M_n(\mathbf{R}) : \forall t \in \mathbf{R}, \exp(tX) \in G\}.$$

1) Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbf{R})$ stable par le crochet de Lie $[X,Y] = XY - YX$. On dit que $\mathcal{G}$ est l'algèbre de Lie de G.

2) Montrer qu'il existe un voisinage U de 0 dans $\mathcal{G}$ et un voisinage V de I dans G tel que $\exp : U \to V$ soit un homéomorphisme.

3) Montrer que G est une sous-variété de $M_n(\mathbf{R})$ de même dimension que $\mathcal{G}$. On dite que G est un groupe de Lie linéaire.

4) Montrer que $\mathcal{G}$ est l'espace vectoriel tangent de G en I.

5) Montrer que les exemples de l'exercice 3 sont des groupes de Lie linéaires.

Exercice 8

Soient S_1 et S_2 deux sous-variétés de $\mathbf{R}^n$ de dimension n_1 et n_2 respectivement. On dit que S_1 et S_2 s'intersectent transversalement en $P \in S_1 \cap S_2$ si $T_P(S_1) + T_P(S_2) = \mathbf{R}^n$. On suppose que S_1 et S_2 s'intersectent en tout point de $S_1 \cap S_2$. Montrer que $S_1 \cap S_2$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ de dimension $n_1 + n_2 - n$ (on pourra utiliser le fait que S_1 et S_2 sont localement des graphes ; on rappelle aussi que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$, on a $\dim(F+G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G$.)

Exercice 9

Soit M une sous-variété fermée de $\mathbf{R}^n$ et soit X un champ de vecteurs C^∞ sur $\mathbf{R}^n$ tel que $X(p) \in T_pM$ pour tout $p \in M$. Pour $p_0 \in M$, montrer que la courbe intégrale de X passant par p_0 est tracée sur M.