Université d'Orléans
Département de Mathématiques
M1MA06

18 Fvrier 2015

Feuille d'exercices n^0 4

Exercice 1

Calculer la première forme fondamentale des surfaces suivantes :
a)$z = f(x, y)$;
b) la terre en coordonnées sphériques ;

Exercice 2

Montrer que l'on peut choisir des cartes d'un plan de $\mathbf{R}^3$ et du cylindre $x^2+y^2 = 1$ donnant la même première forme fondamentale.

Exercice 3

On considère la surface de révolution S engendrée par la rotation autour de l'axe Oz de la courbe plane régulière paramétrée par $\alpha(t) = (f(t), g(t)) \quad a < t < b$ (avec $f(t) > 0$).
a) Calculer la première forme fondamentale de cette surface dans une des cartes construites dans l'exercice 2 de la feuille n^0 3.
b) Montrer que l'aire de S vaut $2\pi \int_a^b f(t)\sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}dt$.
c) Déterminer ainsi l'aire du cône d'angle au sommet α et de hauteur h, de l'ellipsoïde $x^2/a^2 + y^2/a^2 + z^2/c^2 = 1$ et d'un tore engendré par la rotation d'un cercle de rayon r et dont le centre est à la distance $a > r$ de l'axe Oz.

Exercice 4

Soit S une surface rgulière de $\mathbf{R}^3$ admettant une carte globale $\phi : U \to S$ (ϕ surjective). On note $d\sigma$ l'élément d'aire. Pour toute fonction $f : S \to \mathbf{R}$ continue et à support compact, on pose

$$\int_S f d\sigma = \int_U f \circ \phi(u, v) \| \frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \| dudv$$

Vérifier que cette quantité ne dépend pas de la carte choisie.

Remarque. L'application $f \mapsto \int_S f d\sigma$ est une mesure de Radon sur S. Plus généralement, si ρ est une fonction continue positive donnée sur S, $f \mapsto \int_S f\rho d\sigma$ est une mesure de Radon sur S. Dans la pratique, ρ représente souvent une densité superficielle de répartition de masse. La masse totale du système matériel ainsi défini est $m = \int_S \rho d\sigma$.

Rappelons que le centre de masse de ce système matériel est le point G défini par

$$\mathbf{OG} = \frac{1}{m} \int_S \mathbf{OP} \rho(P) d\sigma(P)$$

Déterminer le centre de gravité du système matériel constitué par une demi-sphère munie d'une répartition de masse de densité constante.

Exercice 5

Soit $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x^2 + y^2 \leq z^{2\alpha}, z > 1\}$ où $-1 < \alpha < -1/2$. Calculer le volume de D et l'aire de son bord $\partial D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x^2 + y^2 = z^{2\alpha}, z > 1\}$. (Ce résultat peu intuitif est souvent appelé le paradoxe de la peinture).

Exercice 6

On considère dans le plan yOz un fil homogène $\mathcal{F}$ et on note y_G l'abscisse de son centre de gravité. Montrer que l'aire de la surface de révolution engendrée par la rotation de ce fil autour de l'axe Oz vaut $2\pi y_G l(\mathcal{F})$ où $l(\mathcal{F})$ est la longueur de $\mathcal{F}$. (Ce résultat est connu comme le premier théorème de Guldin : l'aire est le produit de la longueur du fil par le périmétre du cercle décrit par le centre de gravité du fil.)

Exercice 7

Soient E, F deux espaces euclidiens et T une application linéaire de E dans F. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que l'on ait $< Tv, Tw >= \lambda^2 < v, w >$ pour tous $v, w \in E$;

(b) il existe un réel $\mu > 0$ tel que l'on ait $\|Tv\| = \mu \|v\|$ pour tout $v \in E$;

(c) il existe une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que les vecteurs $Te_1, \ldots, Te_n$ soient deux à deux orthogonaux et de même longueur $\neq 0$;

(d) T est injective et préserve les angles.

Une application linéaire qui satisfait à ces conditions est appelée une *similitude*. Une application différentiable d'une surface dans une autre est dite *conforme* si en tout point son application linéaire tangente est une similitude.

Exercice 8

Montrer qu'une similitude de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ est ou bien de la forme $z \mapsto cz$ avec $c \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, ou bien de la forme $z \mapsto \overline{cz}$ avec $c \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

Exercice 9

Soit f une application différentiable d'un ouvert connexe $U \subset \mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ dont la dérivée est non nulle en chaque point de U. Montrer que f est conforme (c.a.d. préserve les angles) si et seulement si on a, ou bien $\partial f/\partial\overline{z} = 0$ en tout point de U (dans ce cas, f est holomorphe), ou bien $\partial f/\partial z = 0$ en tout point de U (dans ce cas, on dit que f est antiholomorphe, c'est une fonction holomorphe de $\overline{z}$).

Exercice 10

Soit S la sphère de centre O et de rayon 1 dans $\mathbf{R}^3$. Montrer que la projection stéréographique $\theta_+ : S \setminus \{N\} \to \mathbf{R}^2$ est conforme.

Exercice 11

Soit $\alpha : U \subset \mathbf{R^2} \to S$ la carte de la sphère S donnée par les coordonnées sphériques avec $U =]0, 2\pi[\times]0, \pi[$ et

$$\alpha(\varphi, \theta) = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta)$$

On pose $u = \ln(\tan\theta/2), v = \varphi$. Montrer qu'une nouvelle carte de S est donnée par

$$\beta(u, v) = (\frac{\cos v}{\cosh u}, \frac{\sin v}{\cosh u}, \tanh u).$$

Calculer les coefficients de la première forme fondamentale dans la carte β. En déduire que β^{-1} est une application conforme qui envoie les méridiens et les parallèles sur des droites du plan (β^{-1} est la *projection de Mercator*).

Exercice 12

Etudier les courbes tracées sur la sphère de centre O et de rayon 1 qui coupent les méridiens suivant un angle constant (on les appellent les *loxodromies*).