Université d'Orléans
Département de Mathématiques
M1MA06

4 Fvrier 2015

Feuille d'exercices n^0 3

Exercice 1

Montrer que les sphères, les hyperboloïdes et les paraboloïdes sont des surfaces régulières. Exhiber pour chacune d'elles un atlas.

Exercice 2

Soit C une courbe plane régulière dans le plan des yz, qui ne rencontre pas l'axe des z et qui admet comme paramétrisation $\alpha(t) = (f(t), g(t))$, où $t \in]a, b[$ et α est C^∞. On considère la partie S de $\mathbf{R}^3$ décrite par la rotation de C autour de l'axe des z.

1) Montrer que $\phi(u, t) = (f(t)\cos u, f(t)\sin u, g(t))$ où $(u, t) \in] - \pi, \pi[\times]a, b[$ est une carte de S.

2) Donner un atlas de S (on dit que S est une surface de révolution).

Exercice 3

Soit $\mathbf{S}$ la sphère de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbf{R}^3$. On note N le pôle nord. Pour tout $M \in \mathbf{S} \setminus \{N\}$, on note $\theta_N(M)$ le point d'intersection de la droite joignant les points N et M avec le plan xy. Montrer que $\varphi_N = \theta_N^{-1}$ est une carte de $\mathbf{S}$ qui couvre $\mathbf{S} \setminus \{N\}$. On dit que θ_N est la projection stéréographique de $\mathbf{S} \setminus \{N\}$ sur $\mathbf{R}^2$ à partir du pôle nord.

En utilisant de même la projection stéréographique à partir du pôle sud, exhiber un atlas de la spère formé de deux cartes. Déterminer le changement de cartes.

Exercice 4

Le cône d'équation $z^2 = x^2 + y^2$ est-il une surface régulière ?

Exercice 5

Montrer que $S = \{(x, y, z) : z = x^2 - y^2\}$ est une surface régulière. Vérifier que

$$\begin{aligned} \alpha :\ & \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3 \\ & (u, v) \mapsto (u + v, u - v, 4uv) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \beta : U = \{(u, v) : u \neq 0\} & \to \mathbf{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto (u\cosh v, u\sinh v, u^2) \end{aligned}$$

sont des cartes de S. Quelles parties de S ces cartes couvrent-elles ?

Exercice 6

Soit $\alpha : I \to \mathbf{R}^3$ une courbe paramétré régulière ne passant pas par O. Soit S l'ensemble des points des droites passant par O et qui coupent la courbe α. Donner une carte de S. Quels sont ses points réguliers ?

Exercice 7

a) Montrer que le tore

$$\mathbf{T} = \{((2+\cos u)\cos v, (2+\cos u)\sin v, \sin u), u, v \in \mathbf{R}\}$$

est une surface régulière dans $\mathbf{R}^3$.

b) Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Montrer que $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ donnée par

$$\gamma(t) = ((2+\cos\frac{\alpha t}{2\pi})\cos\frac{\beta t}{2\pi}, (2+\cos\frac{\alpha t}{2\pi})\sin\frac{\beta t}{2\pi}, \sin\frac{\alpha t}{2\pi})$$

est une courbe birégulière C^∞.

c) Montrer que son image $A = \gamma(\mathbf{R})$ est contenue dans le tore $\mathbf{T}$ ci-dessus. Montrer que si α et β sont non nuls et si α/β est irrationnel, alors A est dense dans $\mathbf{T}$.

d) Montrer que si α et β sont non nuls et si α/β est irrationnel, alors γ n'est pas un homéomorphisme de $\mathbf{R}$ sur A quand A est considéré comme un sous-espace de $\mathbf{R}^3$.

Exercice 8

La bande de Moebius est la surface S de $\mathbf{R}^3$ obtenue en prenant une bande rectangulaire de papier et en collant les deux extrémités après avoir fait subir à l'une d'elles une rotation de 180°. On se propose de montrer que S est une surface régulière dans $\mathbf{R}^3$.

On note C le cercle de centre O et de rayon 2 dans le plan Oxy et on considère le segment ouvert PQ donné dans le plan Oxz par $x = 2$ et $|z| < 1$. On déplace le milieu I de PQ le long de C en faisant pivoter PQ autour de I dans le plan OIz, de telle sorte que lorsque OI est d'angle polaire u, le segment PQ a tourné de $u/2$. Lorsque I a fait un tour, PQ retrouve sa position initiale mais avec les extrémités inversées. La figure décrite par PQ est (approximativement) la bande de Moebius S.

a) Montrer que

$$\varphi(u,v) = ((2 - v\sin u/2)\cos u, (2 - v\sin u/2)\sin u, v\cos u/2)$$

définie sur $U =]0, 2\pi[\times]-1, 1[$ est une carte de S. De même

$$\phi(u',v') = ((2 - v'\sin u'/2)\cos u', (2 - v'\sin u'/2)\sin u', v'\cos u'/2)$$

définie sur $U' =]-\pi,\pi[\times]-1,1[$ est une autre carte de S. En déduire que S est une surface régulière.

b) Etudier le signe du déterminant jacobien du changement de cartes après avoir précisé son domaine de définition. La surface S est-elle orientable ?

Exercice 9 *La bouteille de Klein.*

On considère l'application $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$ telle que

$$\varphi(u,v) = ((r\cos v + a)\cos u, (r\cos v + a)\sin u, r\sin v \cos\frac{u}{2}, r\sin v\sin\frac{u}{2})$$

Montrer que l'image de φ est une sous-variété de dimension 2 de $\mathbf{R}^4$. Montrer que S s'identifie canoniquement à l'espace topologique quotient de $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$ par la relation d'équivalence

$$(u,v)\mathcal{R}(u',v') \Leftrightarrow (u=u', v=v'\pm 2\pi) \text{ ou } (u=u'\pm 2\pi, v=2\pi - v')$$

Exercice 10

Soit S la sphère de centre O et de rayon 1 dans $\mathbf{R}^3$. Montrer que l'application antipodale $(x,y,z)\mapsto(-x,-y,-z)$ est un difféomorphisme de S sur S.

Exercice 11

a) Montrer que le paraboloïde $z = x^2+y^2$ est difféomorphe à un plan.

b) Construire un difféomorphisme entre l'ellipsoïde $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} = 1$ et la sphère $x^2+y^2+z^2=1$

Exercice 12

Montrer que les plans affine tangents à la surface $z = xf(y/x) \quad (x\neq 0)$, où f est une fonction différentiable, passent tous par $(0,0,0)$.

Exercice 13

Soit $\alpha : I \to \mathbf{R}^3$ une courbe paramétrés régulière. Déterminer les points réguliers de la surface paramétrée $\beta(t,u) = \alpha(t) + u\alpha'(t)$ où $(t,u)\in I\times\mathbf{R}$. On suppose que α a une courbure partout non nulle. Montrer que les plans tangents à la surface paramétrée régulière β sont tous égaux le long des courbes $u\mapsto\beta(t,u)$.

Exercice 14

Soient f et g deux fonctions de classe C^∞ sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs réelles, avec $f(t)\neq 0$ et $g'(t)\neq 0$ pour tout $t\in I$. On considère la surface paramétrée

$$\beta(t,u) = (f(t)\cos u, f(t)\sin u, g(t))$$

Montrer que les normales à cette surface rencontrent toutes l'axe des z.

Exercice 15

Montrer que si toutes les normales à une surface régulière connexe passent par un même point, la surface est contenue dans une sphère.