Université d'Orléans
Département de Mathématiques
M1MT06

21 Janvier 2015

Feuille d'exercices n^0 2

Exercice 1

Soient $t \mapsto \gamma(t)$ une courbe paramétrée dérivable ne passant pas par l'origine d'un espace vectoriel euclidien et t_0 une valeur du paramètre en laquelle $\gamma(t_0)$ est à distance minimum de l'origine. Montrer que $\gamma(t_0)$ est orthogonal à $\gamma'(t_0)$.

Exercice 2

a) Caractériser les courbes paramétrées deux fois dérivables γ telles que γ'' soit identiquement nul.

b) Caractériser les courbes paramétrées dérivables γ telles qu'en tout point $\gamma(t)$ soit orthogonal à $\gamma'(t)$.

Exercice 3

Soient $\gamma : I \to E$ une courbe paramétrée dérivable et $v \neq 0$ un vecteur de l'espace euclidien E. On suppose que $\gamma'(t)$ est othogonal à v pour tout $t \in I$ et que $\gamma(0)$ est aussi orthogonal à v. Que peut-on-dire de γ ?

Exercice 4

Soit $\gamma : I \to E$ une courbe paramétrée de classe C^1. Montrer que si $\theta : J \to I$ est un difféomorphisme de classe C^1 croissant, l'abscisse curviligne du point de paramètre u comptée à partir de u_0 pour la courbe $\gamma \circ \theta$ est égale à l'abscisse curviligne du point de paramètre $\theta(u)$ comptée à partir de $\theta(u_0)$ pour la courbe γ.

Exercice 5

On considère la courbe paramétrée $\gamma(t) = (e^{bt} \cos t, e^{bt} \sin t)$ avec $b < 0$ (spirale logarithmique). Montrer que $\lim_{t\to\infty} \int_0^t \|\gamma'(u)\| du$ est finie. (La courbe γ est de longueur finie lorsque t décrit $[0, +\infty[$).

Exercice 6

Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ une courbe paramétrée de classe C^1. On fixe $a < b$ dans I et on pose $\gamma(a) = p, \gamma(b) = q$.

a) Montrer que pour tout vecteur $v \in \mathbf{R}^n$, avec $\|v\| = 1$, on a

$$< q - p, v >= \int_a^b < \gamma'(t), v > dt \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

b) En posant $v = \dfrac{q-p}{\|q-p\|}$, montrer que $\|\gamma(b)-\gamma(a)\| \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt$ (ainsi la ligne droite est le plus court chemin joignant $\gamma(a)$ à $\gamma(b)$).

Exercice 7

Un disque de rayon 1 roule sans glisser dans le plan xOy le long de l'axe des x. La figure décrite par un point fixe A de la circonférence du disque est appelée une cycloïde.

a) Déterminer une paramétrisation $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ de la cycloïde. Quels sont ses points singuliers ?

b) Calculer la longueur de l'arc de la cycloïde qui correspond à une rotation complète du disque.

Exercice 8

On considère la courbe paramétrée (hélice) $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ où a et b sont des constantes strictement positives.

a) Déterminer la courbure et la torsion de γ (on commencera par reparamétrer à l'aide de l'abscisse curviligne).

b) Montrer que les tangentes à γ font un angle constant avec l'axe des z.

Exercice 9

Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ une courbe paramétrée birégulière. Montrer que la courbure et la torsion en $t \in I$ sont données par

$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} \qquad \tau(t) = \frac{< \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t) >}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}$$

Exercice 10

Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ une courbe régulière paramétrée par l'abscisse curviligne.

a) Montrer que la courbure est nulle en tout point si et seulement si l'image de γ est contenue dans une droite.

b) On suppose maintenant que la courbure ne s'annule pas sur I. Montrer que la torsion est nulle en tout point si et seulement si l'image de γ est contenue dans un plan.

Exercice 11

Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ une courbe birégulière paramétrée par l'abscisse curviligne. En utilisant l'étude locale de γ au voisinage de s_0, montrer que le plan osculateur en s_0 est la limite du plan passant par la tangente en s_0 et le point $\gamma(s_0 + h)$ quand h tend vers 0.

Exercice 12

Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ une courbe régulière paramétrée par l'abscisse curviligne dont la courbure κ ne s'annule pas sur I. Soit Π un plan qui satisfait aux deux conditions suivantes :

(i) Π contient la tangente en s.

(ii) Pour tout voisinage $J \subset I$ de s, il existe des points de $\gamma(J)$ de part et d'autre de Π.

Prouver que Π est le plan osculateur de γ en s.

Exercice 13

Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ une courbe régulière paramétrée par l'abscisse curviligne. On suppose que $\kappa(s) \neq 0, \tau(s) \neq 0$ et $\kappa'(s) \neq 0$ pour tout $s \in I$, et on pose $R = 1/\kappa, T = 1/\tau$.

a) On suppose que $\gamma(I)$ est contenu sur une sphère centrée en 0. Montrer que

$$\gamma(s) = -R(s)n(s) + R'(s)T(s)b(s)$$

et en déduire que $R^2 + (R')^2T^2 = \text{cste}$ (On pourra dériver trois fois $\|\gamma(s)\|^2 = \text{cste}$).

b) Réciproquement, on suppose que $R^2 + (R')^2T^2 = \text{cste}$. Montrer que

$$\gamma(s) + R(s)n(s) - R'(s)T(s)b(s)$$

ne dépend pas de s. En déduire que $\gamma(I)$ est contenu sur une sphère.

Exercice 14

Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ une courbe paramétrée régulière. On suppose qu'il existe $t_0 \in I$ tel que la distance $\|\gamma(t)\|$ de O à l'image de γ passe par un maximum en t_0. Montrer que la courbure κ de γ en t_0 vérifie $|\kappa(t_0)| \geq 1/\|\gamma(t_0)\|$.

Exercice 15

Soit $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ une courbe paramétrée du plan deux fois dérivable. Montrer que sa courbure algébrique est

$$\kappa_a(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

Exercice 16

On considère une courbe paramétrée du plan donné en coordonnées polaires par $\rho = \rho(\theta), a < \theta < b$

a) Montrer que l'abscisse curviligne comptée à partir de θ_0 est

$$s(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta$$

b) Montrer que la courbure algébrique est

$$\kappa_a(\theta) = \frac{2\rho'^2 - \rho\rho'' + \rho^2}{(\rho'^2 + \rho^2)^{3/2}}.$$

Exercice 17

Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ une courbe régulière paramétrée par l'abscisse curviligne. Montrer que la courbure algébrique est donnée par $\kappa_a(s) = d\theta/ds$ où $\theta(s)$ est l'angle que fait $\gamma'(s)$ avec une direction fixée.

Exercice 18

Soit $k : I \to \mathbf{R}$ dérivable et $s_0 \in I$.

a) Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ une courbe régulière paramétrée par l'abscisse curviligne admettant $k(s)$ comme courbure algébrique en tout point $s \in I$. Montrer que

$$\gamma(s) = (x_0 + \int_{s_0}^{s} \cos\theta(u) du, y_0 + \int_{s_0}^{s} \sin\theta(u) du)$$

avec $\theta(s) = \theta(s_0) + \int_{s_0}^{s} \kappa(u) du$ et $\theta(s_0)$ est l'angle entre $\gamma'(s_0)$ et l'axe Ox.

b) Montrer qu'il existe une courbe paramétrée régulière, et une seule à un déplacement près, admettant k comme courbure algébrique

Exercice 19

Soit γ une courbe paramétrée dans un espace euclidien orienté E de dimension 3. Montrer que la longueur, la courbure et la torsion de γ sont conservés par déplacement (c'est-à-dire par composition avec une isométrie positive de E).

Exercice 20

Déduire de l'équation de Newton

$$m\gamma''(t) = F(\gamma(t)) \quad \text{où} \quad F(P) = -k\frac{\overrightarrow{OP}}{\|\overrightarrow{OP}\|^3}$$

les lois de Kepler sur le mouvement des planètes :

1. Les planètes se meuvent le long d'obites elliptiques dont le soleil occupe l'un des foyers.

2. Le rayon du soleil à la planète balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.

3. Le carré de la période de révolution d'une planète autour du soleil est proportionnel au cube du grand axe de son orbite elliptique.