Université d'Orléans
Département de Mathématiques
M1MT06

14 Janvier 2015

Feuille d'exercices n^0 1

Exercice 1

Ecrire la matrice de la forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique, calculer ses valeurs propres et en déduire la signature de Q.

(a) $Q(x,y,z) = xy + yz + zx$

(b) $Q(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$

Exercice 2

Ecrire la forme quadratique suivante :

$Q(x,y,z) = 5x^2 + 6xz + y^2 - 2yz + 4z^2$

sous la forme

$Q(x,y,z) = a\underline{x}^2 + b\underline{y}^2 + c\underline{z}^2$ où $a,b,c \in \mathbf{R}$ et $(\underline{x},\underline{y},\underline{z})$ est une fonction linéaire de (x,y,z).

La forme quadratique Q est-elle définie positive ?

Exercice 3

Montrer que le sous-ensemble de $\mathbf{R}^3$ défini par l'équation $x^2+y^2-z^2=1$ contient des droites.

Exercice 4

Déterminer la droite passant par $(3,1,-2)$ qui intersecte et qui est perpendiculaire à la droite $x=-1+t, y=-2+t, z=-1+t$.

Exercice 5

Déterminer la distance du plan $12x+13y+5z+2=0$ au point $(1,1,-5)$.

Exercice 6

Démontrer dans $\mathbf{R}^3$ les égalités suivantes

(a) $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b}.\mathbf{c})\mathbf{a}$

(b) $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{c}$

Exercice 7

Démontrer dans $\mathbf{R}^n$ les relations suivantes

(a) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2)$ (identité du parallélogramme.)

(b) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$

(c) $4 < \mathbf{x}, \mathbf{y} >= \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2$ (identité de polarisation.)

Interpréter ces résultats géométriquement en termes du parallélogramme ayant x et y pour côtés adjacents.

Exercice 8

Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ l'une des fonctions définies ci-dessous. Dessiner quelques courbes de niveau et son graphe.

(a) $z = f(x,y) = x - 2y + 2$

(b) $z = f(x,y) = x^2 + 4y^2$

(c) $z = f(x,y) = xy$

(d) $z = f(x,y) = |x|$

(e) $z = f(x,y) = \max(|x|, |y|)$

Exercice 9

Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ l'une des fonctions définies ci-dessous. Dessiner quelques ensembles de niveau et quelques sections de son graphe.

(a) $w = f(x,y,z) = -x^2 - y^2 - z^2$

(b) $w = f(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + 9z^2$

(c) $w = f(x,y,z) = x^2 + y^2$

Exercice 10

Dessiner ou décrire les sous-ensembles de $\mathbf{R}^3$ donnés par les équations suivantes :

(a) $x + 2z = 4$

(b) $4x^2 + y^2 = 16$

(c) $x^2 + y^2 - 2x = 0$

(d) $z^2 = y^2 + 4$

(e) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

(f) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

(g) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$

Exercice 11

On considère la fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$\begin{aligned} f(x,y) =& \frac{xy^2}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ =& 0 \quad \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{aligned}$$

a) Montrer que f est continue en $(0,0)$.

b) Montrer que $\partial f/\partial x(0,0)$ et $\partial f/\partial y(0,0)$ existent. On pose

$$A = [\partial f/\partial x(0,0), \partial f/\partial y(0,0)].$$

c) Soit $a, b \in \mathbf{R}$ et $\mathbf{g}(t) = (at, bt)$. Montrer que $f \circ g$ est dérivable en 0. A-t-on $(f \circ g)'(0) = A.g'(0)$?

d) La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 12

Montrer que le potentiel de Newton $V = -GM/r$, où G et M sont des constantes positives et $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ satisfait l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Exercice 13

Montrer que l'équation

$$xy + z + 3xz^5 = 4$$

peut être résolue en z comme fonction de (x, y) au voisinage de $(1, 0, 1)$. Calculer les dérivées partielles $\partial z/\partial x$ et $\partial z/\partial y$ en $(1, 0)$.

Exercice 14

Trouver les points critiques de f, déterminer s'ils sont des maximaux locaux, des minimaux locaux, des points-selle ou autres. Déterminer les maxima et minima de f.

a) $f(x, y) = x^2 - y^2 + xy \quad \text{sur} \quad \mathbf{R}^2$;

b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy \quad \text{sur} \quad \mathbf{R}^2$;

c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy \quad \text{sur} \quad \mathbf{R}^2$;

d) $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4 \quad \text{sur} \quad \mathbf{R}^2$;

e) $f(x, y) = \ln(2 + \sin xy) \quad \text{sur} \quad \mathbf{R}^2$.

f) $f(x, y) = 2xy - (1 - x^2 - y^2)^{3/2} \quad \text{pour} \quad x^2 + y^2 < 1$.

Exercice 15

Déterminer la distance du point $(0, 0, 0)$ au graphe de la fonction $z = 1/xy$ de domaine $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^*$.

Exercice 16

Justifier la formule

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

et en déduire à l'aide d'un changement de variables en coordonnées polaires la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Exercice 17

Calculer le volume compris entre les surfaces $x^2 + y^2 = z$ et $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

Exercice 18

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a)$(y + 1)dx + (x^2 - 4)dy = 0$

b) $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$

c) $y' + 2xy = x$

Exercice 19

Calculer la solution du problème de Cauchy en précisant le plus grand intervalle de définition de la solution :

$$\begin{cases} x' + \dfrac{2}{t}x & = \dfrac{\cos t}{t^2} \\ x(\pi) = 0 \end{cases}$$