RÉSUMÉ 5

FORMES DIFFÉRENTIELLES ET INTÉGRATION

---

1. Formes multilinéaires alternées

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension n. On dit qu'une forme k-linéaire $\alpha : E^k \to \mathbf{R}$ est *alternée* si elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

(i) pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_k$, $\quad \alpha(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) = \epsilon(\sigma)\alpha(x_1, \dots, x_k)$, où $\epsilon(\sigma)$ est la signature de σ,

(ii) $\quad \alpha(x_1, \dots, x_k) = 0$ dès que deux des x_i sont égaux.

On note $\Lambda^k E^*$ l'ensemble des formes k-linéaires alternées (avec par convention, $\Lambda^0 E^* = \mathbf{R}$). C'est un espace vectoriel de dimension $\binom{n}{k}$ (en particulier 0 pour $k > n$). Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E, alors $\{e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}, 1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n\}$ est une base de $\Lambda^k E^*$, où $\{e^1, \dots, e^n\}$ est la base duale de E^* et

$$e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}(x_1, \dots, x_k) = \begin{vmatrix} e^{i_1}(x_1) & \dots & e^{i_1}(x_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{i_k}(x_1) & \dots & e^{i_k}(x_k) \end{vmatrix}$$

Pour $E = \mathbf{R}^n$, on note $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ la base duale de la base canonique. On définit le *produit extérieur* $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+l} E^*$ de $\alpha \in \Lambda^k E^*$ et de $\beta \in \Lambda^l E^*$ par

$$\alpha \wedge \beta(x_1, \dots, x_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{k+l}} \epsilon(\sigma)\alpha(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)})\beta(x_{\sigma(k+1)}, \dots, x_{\sigma(k+l)})$$

On a

(i) $\beta \wedge \alpha = (-1)^{kl} \alpha \wedge \beta$ pour $\alpha \in \Lambda^k E^*, \beta \in \Lambda^l E^*$.

(ii) $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$.

2. Formes différentielles sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$

On suppose que U est un ouvert de $E = \mathbf{R}^n$. Une *k-forme différentielle sur* S est une application $\alpha : U \to \Lambda^k E^*$. Elle s'écrit de manière unique

$$\alpha_x = \alpha(x) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} a_{i_1 \ldots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

On supposera généralement que α est C^∞, c'est-à-dire les coefficients $a_{i_1 \ldots i_k}$ sont C^∞. On note $\Omega^k(U)$ l'ensemble des k-forme différentielle sur U de classe C^∞. C'est un espace vectoriel. Notons que $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$. On définit le *produit extérieur* $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{k+l}(U)$ de $\alpha \in \Omega^k(U)$ et de $\beta \in \Omega^l(U)$ par $(\alpha \wedge \beta)(x) = \alpha(x) \wedge \beta(x)$.

On définit aussi pour tout k la différentielle $d = d_k : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ par les propriétés suivantes :

(i) pour $f \in \Omega^0(U)$, $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)dx^i$,

(ii) pour $\alpha \in \Omega^k(U)$ et $\beta \in \Omega^l(U)$, on a $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$,

(iii) $d^2 = 0$.

Soit $\varphi : U \subset \mathbf{R}^n \to V \subset \mathbf{R}^m$ une application de classe C^∞. On définit l'*image réciproque* $\varphi^*\alpha \in \Omega^k(U)$ de $\alpha \in \Omega^k(V)$: pour $X_1, \ldots, X_k \in \mathbf{R}^n$ et $x \in U$, on pose

$$\varphi^*\alpha(x)(X_1, \ldots, X_k) = \alpha(\varphi(x))(d_x\varphi X_1, \ldots, d_x\varphi X_k)$$

Si $\alpha = a_{i_1 \ldots i_k}(y) dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_k}$, on obtient $\varphi^*\alpha$ en remplaçant y par $\varphi(x)$ et dy^i par $d_x\varphi^i$. On a

(i) $\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = (\varphi^*\alpha) \wedge (\varphi^*\beta)$,

(ii) $d(\varphi^*\alpha) = \varphi^* d\alpha$.

Soit $\alpha \in \Omega^k(U)$. On dit que α est *fermée* si $d\alpha = 0$. On dit que α est *exacte* s'il existe $\beta \in \Omega^{k-1}(U)$ telle que $\alpha = d\beta$.

Théorème. *(lemme de Poincaré). Si U est un ouvert étoilé de $\mathbf{R}^n$, alors toute forme différentielle sur U qui est fermée est exacte.*

3. Formes différentielles sur une sous-variété.

Soit M une sous-variété de dimension m dans $\mathbf{R}^n$. Une *k-forme différentielle sur M* est une application $\alpha : p \in M \to \alpha(p) = \alpha_p \in \Lambda^k T_pM^*$. Etant donnés $X_1, \ldots, X_k \in T_pS$, on peut donc définir le scalaire $\alpha_p(X_1, \ldots, X_k)$ et étant donnés des champs de vecteurs tangents $X_1, \ldots, X_k$, on peut définir la fonction $p \mapsto \alpha_p(X_1(p), \ldots, X_k(p))$. On dit que α est de classe C^∞ si cette fonction est C^∞ pour tous champs de vecteurs tangents C^∞. On note $\Omega^k(M)$ l'ensemble des k-formes différentielles sur M de classe C^∞. On définit la somme $\alpha + \beta$, le produit extérieur $\alpha \wedge \beta$, la différentielle $d\alpha$ et l'image réciproque comme dans 5.2. (en utilisant le cas échéant l'application linéaire tangente à la place de la différentielle usuelle).

En fait, au moyen de cartes, on se ramène à des formes différentielles sur des ouverts de $\mathbf{R}^m$: si $\varphi : U \to M$ est une carte de M et si $\alpha \in \Omega^k(M)$, on définit $\varphi^*\alpha \in \Omega^k(U)$ par

$$\varphi^*\alpha(u)(X_1, \ldots, X_k) = \alpha(\varphi(u))(\varphi'(u)X_1, \ldots, \varphi'(u)X_k)$$

pour $u \in U$ et $X_1, \ldots, X_k \in \mathbf{R}^m$. Soit (U_i, φ_i) un atlas de M. On obtient une famille de k-formes $\varphi_i^*\alpha \in \Omega^k(U_i)$ qui sont compatibles dans le sens que $\varphi_i^*\alpha = h_{ji}^*\varphi_j^*\alpha$ pour le changement de cartes $h_{ji} : U_i \to U_j$. Réciproquement, étant donnée une famille de k-formes $\alpha_i \in \Omega^k(U_i)$ qui sont compatibles, il existe une et une seule k-forme $\alpha \in \Omega^k(M)$ telle que $\alpha_i = \varphi^*\alpha$ pour tout i.

4. **Formes de volume**

On appelle *forme de volume* sur un espace vectoriel E de dimension n un élément non nul $\omega \in \Lambda^n E^*$. Pour $n = 1$ on parle plutôt de forme de longueur et pour $n = 2$ de forme de surface. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors $\omega(e_1, \dots, e_n)$ est non nul et pour tout $T \in L(E)$ on a $\omega(Te_1, \dots, Te_n) = \det(T)\omega(e_1, \dots, e_n)$. Une forme de volume ω définit une orientation de de E : une base $(e_1, \dots, e_n)$ est dite positive relativement à ω si $\omega(e_1, \dots, e_n) > 0$.

On appelle *forme de volume canonique* d'un espace vectoriel euclidien orienté E l'unique forme de volume ω telle que $\omega(e_1, \dots, e_n) = 1$ pour une base $(e_1, \dots, e_n)$ orthonormée positive. Si $(f_1, \dots, f_n)$ est une base positive quelconque, on a $\omega(f_1, \dots, f_n) = \sqrt{\det(G)}$ où $G = (< f_i, f_j >)$ est la matrice de Gram de $(f_1, \dots, f_n)$.

On appelle *forme de volume* d'une sous-variété M de dimension m un élément $\omega \in \Omega^m(M)$ tel que $\omega(p) \neq 0$ pour tout $p \in M$. Une forme de volume existe ssi la sous-variété M est orientable.

On appelle *forme de volume canonique* d'une sous-variété orientée M dans $\mathbf{R}^n$ l'unique forme de volume ω telle que pour tout $p \in M$, $\omega(p)$ soit la forme de volume canonique de l'espace vectoriel euclidien orienté T_pM. Son expression dans une carte positive (U, φ) est

$$\varphi^*\omega = \sqrt{\det(G)} du^1 \wedge du^2 \wedge \dots \wedge du^m$$

où G est la matrice des coefficients de la première forme fondamentale. Si $M = S$ est une surface régulière dans $\mathbf{R}^3$, On a, pour tout $p \in S$ et tout $X, Y \in T_pS$, $\omega_p(X, Y) = \det(X, Y, \mathbf{n}(p))$, où $\mathbf{n}(p)$ est le vecteur normal de longueur 1.

5. **Intégration des formes différentielles**

Soit $\omega = a(x)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ une n-forme différentielle sur un ouvert V de $\mathbf{R}^n$ et A un sous-ensemble mesurable de V. On définit l'intégrale de ω sur A par $\int_A \omega = \int_A a(x)dx^1 \dots dx^n$ pourvu que cette dernière intégrale ait un sens (c'est-à-dire si a est intégrable sur A). Pour tout difféomorphisme φ d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ sur V préservant l'orientation, on a $\int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^*\omega = \int_A \omega$.

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^k$ et $\varphi : U \to \mathbf{R}^n$ différentiable. Si B est un sous-ensemble mesurable de U et ω est une k-forme différentielle définie sur un voisinage de $\varphi(B)$, on peut définir $\int_B \varphi^*\omega$ quand cela a un sens. Dans le cas d'une courbe paramétrée $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ et d'une 1-forme $\omega = \sum_{i=1}^n a_i(x)dx^i$ définie sur un voisinage de $\gamma(I)$, on définit

$$\int_\gamma \omega = \int_I \gamma^*\omega = \int_I \sum_{i=1}^n a_i(x^1(t), \dots, x^n(t)) \frac{dx^i}{dt}(t)dt$$

où $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$.

Soient M une sous-variété orientée de dimension m, ω une m-forme sur M et A un sous-ensemble mesurable de M. Supposons d'abord que $A = \varphi(B)$ où $\varphi : U \to M$ une carte positive et B est un sous-ensemble mesurable de U. On définit alors $\int_A \omega = \int_B \varphi^*\omega$ quand cette dernière intégrale a un sens. Cela est indépendant de la carte positive choisie. Dans le cas général, on choisit une partition de l'unité (h_i) subordonnée au recouvrement $(\varphi_i(U_i))$ d'un atlas positif (φ_i, U_i). Soit A_i l'intersection de A et du support de h_i. On définit alors $\int_A \omega = \sum_i \int_{A_i} h_i\omega$ quand cela a un sens. Cela est indépendant de la partition de l'unité choisie.

6. Formule de Stokes

a) *Domaines et sous-variétés à bord.*

On dira qu'un sous-ensemble D de $\mathbf{R}^n$ est un *domaine à bord* si son intérieur Int$D$ est non-vide et si sa frontière ∂D, qu'on appelle alors le *bord*, est une hypersurface régulière, c'est-à-dire une sous-variété de dimension $n-1$. Par exemple, pour $n = 1$, un intervalle fermé borné $[a, b]$ est un domaine à bord et le bord consiste des deux points a, b. Pour $n = 2$, le disque $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ est un domaine à bord et son bord est le cercle $\partial D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$. Pour $n = 3$, une boule est un domaine à bord et son bord est une sphère.

On peut aussi considérer des *sous-variétés à bord*. Une sphère est une surface sans bord (on dit aussi une *surface fermée*) tandis qu'une hémisphère est une surface à bord : le bord de l'hémisphère nord est l'équateur. Le bord d'un cylindre consiste de deux cercles. En général, une *sous-variété à bord* est un sous-ensemble d'une sous-variété de dimension m, d'intérieur non-vide et dont le bord (la frontière topologique relativement à la sous-variété ambiante) est une réunion de sous-variétés de dimension $m - 1$.

On considèrera seulement des domaines à bord et des sous-variétés à bord orientées. L'orientation du bord doit être compatible avec l'orientation de l'intérieur. Dans le cas d'un domaine à bord D dans $\mathbf{R}^n$, on demande que le vecteur normal à l'hypersurface ∂D soit sortant, c'est-à-dire dirigé vers l'extérieur de D. Dans le cas d'une surface à bord S contenue dans une surface orientée, l'orientation du bord se lit dans une carte positive par la règle ci-dessus. Si un observateur parcourt le bord de la surface avec sa tête dans la direction du vecteur normal, la bonne direction est celle où la surface est à gauche de l'observateur.

b) *Enoncé de la formule de Stokes.*

Théorème. *Soit D un domaine à bord compact dans $\mathbf{R}^n$ et ω une $(n-1)$-forme différentielle définie dans un voisinage de D. Alors*

$$\int_{\partial D} i^*\omega = \int_D d\omega,$$

où $i : \partial D \to \mathbf{R}^n$ est l'inclusion et ∂D a l'orientation compatible.

Remarque. Cette formule est aussi valide pour une sous-variété à bord M orientée de dimension m et une $(m-1)$-forme différentielle définie sur un voisinage de M.

c) *Exemples.*

(i) Pour $n = 0$, $D = [a, b]$ et $\omega = f$ une fonction de classe C^1 définie sur un voisinage de D, c'est la formule

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

(ii) Pour $n = 1$, D un domaine du plan bordé par une courbe de Jordan γ et $\omega = Pdx + Qdy$ une 1-forme définie sur un voisinage de D, c'est la formule de Green-Riemann

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_\gamma Pdx + Qdy.$$

(iii) Pour $n = 2$, D un domaine compact de l'espace bordé par une surface fermée orientée S et $\omega = Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dy + Rdx\wedge dy$, on obtient en introduisant le champ de vecteurs $\mathbf{X} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ et $\mathrm{div}\mathbf{X} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$ la formule de Gauss :

$$\int\int\int_D \mathrm{div}\mathbf{X} \quad dxdydz = \int\int_S < \mathbf{X}, \mathbf{n} > d\sigma,$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur normal de S et $d\sigma$ est la forme de surface canonique.

GRADIENT, DIVERGENCE et ROTATIONNEL

---

1. **Gradient**

On rappelle que dans un espace vectoriel euclidien $(E, <,>)$, il y a un isomorphisme canonique entre E et son dual E^* : à $X \in E$ on associe $X^b \in E^*$ tel que $X^b(Y) =< X, Y >$ pour tout $Y \in E$. Réciproquement, à $\alpha \in E^*$ on associe $\alpha^{\#} \in E$ tel que $\alpha(Y) =< \alpha^{\#}, Y >$ pour tout $Y \in E$.

Soit (M, g) une variété riemannienne et $f : M \to \mathbf{R}$ différentiable. Pour tout $x \in M$, la différentielle $d_x f$ (c'est aussi l'application linéaire tangente $T_x f$) est un élément du dual $T_x^* M$ de l'espace vectoriel tangent $T_x M$. Il lui correspond le vecteur $(d_x f)^{\#} \in T_x M$. On pose

$$\operatorname{grad} f(x) = (d_x f)^{\#}.$$

L'application $x \mapsto \operatorname{grad} f(x)$ est un champ de vecteurs tangents. Ce champ de vecteurs est appelé le *gradient* de la fonction f.

2. **Divergence**

Soit (M, g) une variété riemannienne. La *divergence* d'un champ de vecteurs (tangents) X différentiable défini sur M est une fonction f sur M ainsi définie. On fixe $x \in M$. Soit Y un champ de vecteurs défini au voisinage de x et D_Y la dérivée covariante. L'application $Y(x) \mapsto (D_Y X)(x)$ est bien définie et c'est un endomorphisme de $T_x M$. On note $f(x)$ sa trace et on pose $f = \operatorname{div}(X)$. Il existe d'autres définitions équivalentes de la divergence. Par exemple, on a la formule

$$\int f \operatorname{div}(X) vol = -\int (L_X f) vol,$$

où *vol* est le volume canonique de (M, g), considéré comme une mesure sur M, f est une fonction différentiable à support compact dans M et $L_X f$ désigne la *dérivée de Lie* de la fonction f par rapport au champ de vecteurs X, définie par

$$L_X f(x) = (d/dt)_{t=0} f(F(t, x)) = T_x f(X(x)),$$

où on a noté $F(t, x)$ le flot intégral du champ de vecteurs X.

Une autre formule utilise l'opérateur $*$ défini plus bas :

$$\operatorname{div}(X) = *d * X^b.$$

Dans le cas où X est un champ de vecteurs définie sur un ouvert de l'espace vectoriel euclidien $\mathbf{R}^n$,

$$div(X) = \sum_1^n \partial_i X_i.$$

3. **Laplacien scalaire**

Soit (M,g) une variété riemannienne. On définit pour une fonction f sur M (par exemple de classe C^2) le laplacien de f par $\Delta f = \mathrm{div}(\mathrm{grad} f)$.

4. **Rotationnel**

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension n. L'opérateur $*$ est une application linéaire qui envoie l'espace vectoriel $\Lambda^p E^*$ des p-formes sur l'espace $\Lambda^{n-p}E^*$ des $n-p$-formes. Pour $n=3$ et $p=1$, il est lié au produit vectoriel par la relation

$$*(X^b \wedge Y^b) = (X \wedge Y)^b$$

On se limite au cas d'une variété riemannienne (M,g) orientée de dimension 3. On associe au champ de vecteurs X sur M un autre champ de vecteurs de la manière suivante. On considère d'abord la 1-forme X^b. Sa différentielle dX^b est une 2-forme. Or, il existe sur un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 un isomorphisme naturel entre l'espace vectoriel des 1-formes et celui des 2-formes.

Dans le cas où X est un champ de vecteurs défini sur un ouvert de $\mathbf{R}^3$ (ou d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3), le rotationnel de X est l'unique champ de vecteurs $Y = rotX$ tel que $i_Y\omega = d(X^b)$, où ω est le déterminant de E et $i_Y\omega(U,V) = \omega(Y,U,V)$ pour $U,V \in E$.