RÉSUMÉ 4

PROPRIETES METRIQUES DES SURFACES

---

1. La première forme fondamentale

Soit S une surface régulière dans $\mathbf{R}^3$. Pour tout $p \in S$, le plan vectoriel tangent T_pS hérite du produit scalaire de $\mathbf{R}^3$. On le note g_p : pour $X, Y \in T_pS$, $g_p(X,Y) =< X, Y >$. Muni de g_p, T_pS est un espace vectoriel euclidien. La *première forme fondamentale* de S est le champ de produits scalaires $p \mapsto g_p$. Soit (φ, U) une carte de S. On note $(u^1, u^2) = (u, v)$ les coordonnées locales. Soit $(u, v) \in U$ et $p = \varphi(u, v)$. On sait que $\{\mathbf{e_1} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial u^1}(u,v), \mathbf{e_2} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial u^2}(u,v)\}$ est une base de T_pS. On note $g_{i,j}(u,v) = g_p(\mathbf{e_i}, \mathbf{e_j})$ les coefficients de $g_{\varphi(u,v)}$ dans cette base. On note $[G] = [g_{i,j}]$ la matrice des coefficients. Soit $(\underline{\varphi}, \underline{U})$ une nouvelle carte. On note h le changement de cartes telle que $\varphi = \underline{\varphi} \circ h$ et $(\underline{u}, \underline{v}) = h(u,v)$. La matrice $[\underline{G}]$ des coefficients de g_p dans la nouvelle carte se déduit de $[G]$ par la formule $[G] = {}^t[J][\underline{G}][J]$, où $[J]$ est la matrice jacobienne de h en (u,v).

2. Longueur des courbes

Soit S une surface régulière dans $\mathbf{R}^3$ et $\gamma : I \to S$ une courbe paramétrée de classe C^1. Etant donnés $a < b$ dans I, la longueur de l'arc de courbe correspondant s'exprime à l'aide de la première forme fondamentale :

$$l(\gamma; a, b) = \int_a^b (g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)))^{1/2} dt.$$

Si $\gamma([a,b]) \subset \varphi(U)$, où (φ, U) une carte de S et si on écrit $\gamma(t) = \varphi(u^1(t), u^2(t))$, cela devient

$$l(\gamma; a, b) = \int_a^b \big[\sum g_{i,j} \frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}\big]^{1/2} dt.$$

3. Aire d'une surface

Soit (φ, U) une carte d'une surface régulière S dans $\mathbf{R}^3$ et A une partie mesurable de U. On définit l'aire de $B = \varphi(A)$ par

$$\text{aire}(B) = \int\int_A \| \frac{\partial\varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial v} \| \, dudv$$

On a l'égalité

$$\| \frac{\partial\varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial v} \| = (\det[G])^{1/2}$$

Cette définition ne dépend pas de la carte choisie.

4. **La deuxième forme fondamentale**

Soit S une surface régulière orientée dans $\mathbf{R}^3$. On note $\mathbf{n}(p)$ son vecteur normal en $p \in S$. L'*application de Gauss* est l'application $p \mapsto \mathbf{n}(p)$ de S dans la sphère unité. L'application linéaire tangente en p, notée $T_p\mathbf{n}$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel euclidien T_pS, appelé *endomorphisme de Weingarten.* Il est symétrique. On note L_p la forme bilinéaire symétrique associée à $T_p\mathbf{n}$: pour $X, Y \in T_pS$,

$$L_p(X,Y) = g_p(X, T_p\mathbf{n}Y).$$

La *deuxième forme fondamentale* de S est le champ de formes bilinéaires symétriques $p \mapsto L_p$. Considérons la base $\{\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)\}$ de T_pS (où $p = \varphi(u,v)$) associée à une carte directe (φ, U)). La relation ci-dessus s'écrit matriciellement

$$[L] = [G][T_p\mathbf{n}],$$

où on a introduit les matrices dans cette base. Les coefficients de L sont donnés par

$$L_{i,j}(u,v) = -< \mathbf{n}(\varphi(u,v)), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^i \partial u^i}(u,v) > .$$

Ces relations permettent de calculer $[T_p\mathbf{n}]$.

Les valeurs propres κ_1 et κ_2 de $T_p\mathbf{n}$ s'appellent les *courbures principales* de S en p ; les directions propres associées s'appellent les *directions principales.* La *courbure de Gauss* K et la *courbure moyenne* H de S en p sont définies par

$$K = \kappa_1\kappa_2 = \det T_p\mathbf{n} \quad \text{et} \quad H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2}\mathrm{Trace} T_p\mathbf{n}.$$

5. **Le Théorème de Gauss**

Théorème (theorema egregium). *La courbure de Gauss K d'une surface régulière S dans $\mathbf{R}^3$ ne dépend que de la première fondamentale.*

Explicitement, $K = R_{12}^{2\ 1}$, où

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma^l jk}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma^l ik}{\partial u^j} + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l$$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{g^{kl}}{2}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right)$$

6. **Isométries locales et applications conformes**

Soient S et $\underline{S}$ deux surfaces régulières. On dit qu'une application différentiable f de S dans $\underline{S}$ est une *isométrie locale* si pour tout $p \in S$, l'application linéaire tangente $T_p f$ est une isométrie de $T_p S$ sur $T_{f(p)}\underline{S}$. Si, de plus, f est une bijection de S sur $\underline{S}$, on dit que f est une *isométrie*. On dit que deux surfaces S et $\underline{S}$ sont isométriques si il existe une isométrie de l'une sur l'autre. On dit qu'elles sont localement isométriques si tout point p de S admet un voisinage isométrique à un sous-ensemble de $\underline{S}$ et tout point $\underline{p}$ de $\underline{S}$ admet un voisinage isométrique à un sous-ensemble de S.

Théorème (Gauss). *Soit $f : S \to \underline{S}$ une isométrie locale. Alors, la courbure de Gauss de S en p est égale à la courbure de Gauss de $\underline{S}$ en $f(p)$.*

On rappelle qu'on appelle *similitude* d'un espace vectoriel euclidien E dans un autre $\underline{E}$ une application linéaire inversible de E dans $\underline{E}$ qui conserve les angles. On dit qu'une application différentiable f de S dans $\underline{S}$ est *conforme* si pour tout $p \in S$, l'application linéaire tangente $T_p f$ est une similitude de $T_p S$ sur $T_{f(p)}\underline{S}$.

Théorème (admis). *Toute surface régulière admet un atlas constitué de cartes conformes.*

7. **Transport parallèle et géodésiques**

Soit S une surface régulière dans $\mathbf{R}^3$. Pour tout $p \in S$, on note P_p la projection orthogonale de $\mathbf{R}^3$ sur $T_p S$. Etant donnés une courbe paramétrée $\gamma : I \to S$ et un champ de vecteurs tangents X défini sur $\gamma(I)$, on définit la dérivée covariante de X le long de γ par

$$\frac{D}{dt}X(t) = P_{\gamma(t)}\frac{d}{dt}X(t).$$

Proposition. *Etant donnés S, γ comme ci-dessus , $t_0 \in I$ et $X_0 \in T_{\gamma(t_0)}S$, le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} DX/dt & = & 0 \\ X(0) & = & X_0 \end{cases}$$

admet une solution et une seule $X : t \in I \mapsto X(t) \in T_{\gamma(t)}S$.

On définit alors le transport parallèle d'un vecteur tangent le long de γ par $H(t, t_0)X_0 = X(t)$.

Proposition. *Le transport parallèle $H(t, t_0) : T_{\gamma(t_0)}S \to T_{\gamma(t)}S$ est isométrique.*

On dit qu'une courbe paramétrée $\gamma : I \to S$ de classe C^2 est *géodésique* si son vecteur dérivée est parallèle le long de γ, c'est-à-dire si elle vérifie $D\gamma'/dt = 0$. Cela est équivalent à dire que pour tout $t \in I$, $\gamma''(t)$ est normal à la surface en $\gamma(t)$.

Proposition. *Etant donnés $p \in S$ et $X \in T_pS$, il existe une courbe paramétrique géodésique maximale et une seule $\gamma : I \to S$ telle $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = X$.*

Dans une carte, l'équation du transport parallèle est

$$\frac{dY^k}{dt} + \Gamma^k_{ij} \frac{du^i}{dt} Y^j = 0$$

et l'équation des géodésiques est

$$\frac{d^2u^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{du^j}{dt} \frac{du^k}{dt} = 0$$

Théorème. *Si une courbe p.p.a.c. $\gamma : [a.b] \to S$ de classe C^2 réalise le minimum de la longueur des chemins entre $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$, alors γ est géodésique.*