RÉSUMÉ 3

LES SURFACES DANS L'ESPACE

1. Vers la définition d'une surface régulière.

On rencontre le plus souvent, par ordre de généralité croissante, trois grands types de surface régulière dans $\mathbf{R}^3$:

1. Le graphe d'une fonction $f : U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de classe C^∞ avec U ouvert de $\mathbf{R}^2$.
2. Une surface paramétrée $\varphi : U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ de classe C^∞, avec U ouvert de $\mathbf{R}^2$. On demande en outre que φ satisfasse les conditions $(i), (ii), (iii)$ ci-dessous.
3. Une surface de niveau $F^{-1}(c)$, où $F : V \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ est de classe C^∞, V est un ouvert de $\mathbf{R}^3$ et c est une valeur régulière de F (cela signifie que $F^{-1}(c)$ est non vide et que d_pF est surjective pour tout $p \in F^{-1}(c)$).

Pour la théorie générale, on préfère la définition suivante d'une surface régulière $S \subset \mathbf{R}^3$. Soit S un sous-ensemble de $\mathbf{R}^3$. On définit d'abord une carte de S.

Definition. *Une* carte *de S est une application $\varphi : U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ de classe C^∞ , où U est un ouvert de $\mathbf{R}^2$ telle que*

(i) *$\varphi(U)$ est un ouvert de S (muni de la topologie induite par $\mathbf{R}^3$) ;*
(ii) *φ est un homéomorphisme de U sur $\varphi(U)$ et*
(iii) *φ est une immersion.*

Definition. *On dit qu'un sous-ensemble S de $\mathbf{R}^3$ est une* surface régulière *si pour tout point p de S, il existe une carte (φ, U) de S telle que p appartienne à $\varphi(U)$.*

Definition. *Un* atlas *de S est une famille $\{(\varphi_i, U_i)\}$ de cartes de S telle que $S = \bigcup \varphi_i(U_i)$*

Les exemples ci-dessus sont des surfaces régulières. Autres exemples : les surfaces de révolution.

2. Changements de cartes

Deux cartes (φ, U) et $(\underline{\varphi}, \underline{U})$ d'une surface régulière S sont reliées par un changement de cartes. Notons $V = \varphi^{-1}(\underline{\varphi}(\underline{U}))$ et $\underline{V} = \underline{\varphi}^{-1}(\varphi(U))$. Le changement de cartes est le difféomorphisme $h : V \to \underline{V}$ de classe C^∞ tel que $\varphi_{|V} = \underline{\varphi} \circ h$. Pour simplifier les notations, on sous-entend le domaine et l'image de h et on écrit simplement $\varphi = \underline{\varphi} \circ h$.

Etant donné un atlas $\{\varphi_i, U_i)\}$ de S, on a les changements de cartes $h_{i,j}$ tels que $\varphi_j = \varphi_i \circ h_{i,j}$.

3. **Le plan tangent**

Soit S une surface régulière, $p_0 \in S$ et (φ, U) une carte de S telle que $p_0 = \varphi(u_0, v_0)$ appartienne à $\varphi(U)$. L'image $d_{(u_0,v_0)}\varphi(\mathbf{R}^2)$ de la différentielle $d_{(u_0,v_0)}\varphi$ ne dépend pas de la carte choisie. On l'appelle le plan vectoriel tangent à S en p_0 et on le note $T_{p_0}S$. Il admet $\{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0), \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0)\}$ pour base. Le plan vectoriel tangent $T_{p_0}S$ est donc l'orthogonal du vecteur $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$; on dit que ce vecteur est normal à S en p_0. On intoduit aussi le vecteur normal normalisé $\mathbf{n} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} / \| \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \|$.

On peut aussi utiliser les courbes paramétrées tracées sur S pour définir le plan tangent : d'une part, si $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ est une courbe paramétrée telle que $\gamma(t) \in S$ pour tout $t \in I$, alors $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}S$. D'autre part, pour tout $X \in T_{p_0}S$, il existe une courbe paramétrée $\gamma : I \to S$ telle que $\gamma(0) = p_0$ et $\gamma'(0) = X$.

4. **Applications différentiables**

a) Cas des applications $f : S \to \mathbf{R}$ (ou $\mathbf{R}^n$)

Soit $p_0 \in S$. On a les trois propriétés équivalentes :

(i) il existe un voisinage V de p_0 dans $\mathbf{R}^3$ et une application $g : V \to \mathbf{R}$ différentiable en p_0 telle que f et g coïncident sur $V \cap S$.

(ii) il existe (φ, U) carte de S telle que $p_0 = \varphi(u_0, v_0) \in \varphi(U)$ et $f \circ \varphi$ est différentiable en (u_0, v_0).

(iii) pour toute carte de S (φ, U) telle que $p_0 = \varphi(u_0, v_0) \in \varphi(U)$, $f \circ \varphi$ est différentiable en (u_0, v_0).

On dit alors que f est différentiable en p_0. Sa différentielle en p_0 (appelée aussi application linéaire tangente) et notée $d_{p_0}f$ (ou $T_{p_0}f$) est l'application linéaire $d_{p_0}f : T_{p_0}S \to \mathbf{R}$ de manière équivalente comme la restriction de $d_{p_0}g$ à $T_{p_0}S$ ou par $d_{p_0}f \circ d_{(u_0,v_0)}\varphi = d_{(u_0,v_0)}(f \circ \varphi)$.

On définit de même "f est différentiable" et "f est de classe C^k".

b) Cas des applications $f : S \to \underline{S}$, où S et $\underline{S}$ sont des surfaces régulières dans $\mathbf{R}^3$.

On peut considérer f comme une application de S dans $\mathbf{R}^3$ et c'est alors un cas particulier de a). On a aussi les propriétés équivalentes suivantes.

(i) f est différentiable en p_0 ;

(ii) il existe (φ, U) carte de S telle que $p_0 = \varphi(u_0, v_0) \in \varphi(U)$ et $(\underline{\varphi}, \underline{U})$ carte de $\underline{S}$ telle que $f(p_0) \in \underline{\varphi}(U)$ et $(\underline{\varphi})^{-1} \circ f \circ \varphi$ est différentiable en (u_0, v_0).

(iii) pour toute carte de S (φ, U) carte de S telle que $p_0 = \varphi(u_0, v_0) \in \varphi(U)$ et toute carte de $\underline{S}$ $(\underline{\varphi}, \underline{U})$ telle que $f(p_0) \in \underline{\varphi}(U)$, $(\underline{\varphi})^{-1} \circ f \circ \varphi$ est différentiable en (u_0, v_0).

L'application $(\underline{\varphi})^{-1} \circ f \circ \varphi$ s'appelle "f lue dans les cartes (φ, U) et $(\underline{\varphi}, \underline{U})$".

L'application linéaire tangente T_pf de $f : S \to \underline{S}$ en $p \in S$ envoie T_pS dans $T_{f(p)}\underline{S}$.

5. **Champs de vecteurs**

Soit S une surface régulière dans $\mathbf{R}^3$. Un champ de vecteurs (tangents) sur S est une application
$$X : S \to \mathbf{R}^3$$
telle que $X(p) \in T_pS$ pour tout $p \in S$. Soit (φ, U) une carte de S. Pour tout $(u,v) \in U$, $\{\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v), \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)\}$ est une base de $T_{\varphi(u,v)}S$ et on peut écrire

$$X \circ \varphi(u,v) = X_1(u,v)\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) + X_2(u,v)\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) = d_{u,v}\varphi.Y(u,v)$$

où $Y(u,v)$ est le vecteur de $\mathbf{R}^2$ de composantes $X_1(u,v)$ et $X_2(u,v)$. L'application X est différentiable [resp. de classe C^k] si et seulement si pour toute carte (φ, U) les applications X_1 et X_2 le sont.

Théorème. *Soit S une surface régulière dans $\mathbf{R}^3$, X un champ de vecteurs sur S de classe C^1 et $p_0 \in S$. Alors le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \gamma'(t) & = & X(\gamma(t)) \\ \gamma(0) & = & p_0 \end{cases}$$

admet une solution maximale et une seule $\gamma : I \to S$.

6. **Surfaces orientées**

L'orientation d'un plan vectoriel dans $\mathbf{R}^3$ peut être définie par un vecteur normal. On dit qu'une surface régulière S dans $\mathbf{R}^3$ est orientable s'il existe un choix continu de vecteur normal $\mathbf{n} : S \to \mathbf{R}^3$. Un tel choix fixe une orientation de S (c'est-à-dire de tous ses plans vectoriels tangents).

On dit que qu'un atlas (φ_i, U_i) est orienté si les déterminants jacobiens de tous les changements de cartes $h_{i,j}$ sont positifs.

Proposition. *Soit S une surface régulière dans $\mathbf{R}^3$. On a l'équivalence :*
(i) S est orientable ;
(ii) S possède un atlas orienté.