RÉSUMÉ 2

LES COURBES

1. Courbes paramétrées

Une *courbe paramétrée* dans $\mathbf{R}^n$ est une application continue $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$, où I est un intervalle de $\mathbf{R}$. Un changement de paramètre est un homéomorphisme $h : I \to \underline{I}$. On dit que deux courbes paramétrées $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ et $\underline{\gamma} : \underline{I} \to \mathbf{R}^n$ définissent la même *courbe* [orientée] s'il existe un changement de paramètre [croissant] $h : I \to \underline{I}$ tel que $\gamma = \underline{\gamma} \circ h$.

2. Courbes régulières et longueur d'arc

Dorénavant, on suppose que les courbes paramétrées sont de classe C^∞ et que les changements de paramètre sont des difféomorphismes de classe C^∞. On dit qu'une courbe paramétrée $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ est *régulière* si pour tout $t \in I$, $\gamma'(t) \neq 0$. On dit alors que la courbe définie par γ est régulière.

On définit la *longueur d'un arc de courbe* en utilisant la structure euclidienne usuelle de $\mathbf{R}^n$: $l(\gamma; a, b) = \displaystyle\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ pour $a < b$ dans I.

On dit qu'une courbe paramétrée $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ est *paramétrée par l'abscisse curviligne* (p.p.a.c.) si pour tout $s \in I$, $\|\gamma'(s)\| = 1$. Toute courbe régulière admet des paramétrisations par l'abscisse curviligne.

3. Courbes dans le plan

On munit le plan $\mathbf{R}^2$ de sa structure euclidienne et de son orientation canoniques. Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ une courbe régulière p.p.a.c. Pour tout $s \in I$, on définit $\mathbf{T}(s) = \gamma'(s)$ et $\mathbf{N}(s)$ comme l'image de $\mathbf{T}(s)$ par la rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$. La famille $(\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s))$ est une base O.N. directe et le repère $(\gamma(s); \mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s))$ s'appelle le *repère de Frénet* au point $\gamma(s)$. La *courbure algébrique* de γ en s est définie par

$$\mathbf{T}'(s) = \kappa_{alg}(s)\mathbf{N}(s).$$

C'est un nombre réel (il est positif si la courbe "tourne" dans le sens positif).

4. Les courbes dans l'espace

On munit l'espace $\mathbf{R}^3$ de sa structure euclidienne et de son orientation canoniques.

On dit qu'une courbe paramétrée $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ est *birégulière* si pour tout $t \in I$, $\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) \neq 0$.

Soit $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ une courbe birégulière p.p.a.c. Pour tout $s \in I$, on définit $\mathbf{T}(s) = \gamma'(s)$, $\mathbf{N}(s) = \gamma''(s)/\|\gamma''(s)\|$ et $\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \wedge \mathbf{N}(s)$. La famille $(\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s))$ est une base O.N. directe et le repère $(\gamma(s); \mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s))$ s'appelle le *repère de Frénet* au point $\gamma(s)$. On a les formules de Frénet

$$\left\{\begin{array}{lcc} \mathbf{T}'(s) & = & \kappa(s)\mathbf{N}(s) \\ \mathbf{N}'(s) & = & -\kappa(s)\mathbf{T}(s) + \tau(s)\mathbf{B}(s) \\ \mathbf{B}'(s) & = & -\tau\mathbf{N}(s) \end{array}\right.$$

qui définissent la courbure $\kappa(s)$ et la torsion $\tau(s)$ de γ en s.

Théorème. *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $\kappa : I \to \mathbf{R}_+^*$ et $\tau : I \to \mathbf{R}$ des fonctions de classe C^∞. Alors,*

(i) Il existe une courbe birégulière p.p.a.c. $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ admettant κ comme fonction courbure et τ comme fonction torsion.

(ii) Si γ_1 et γ_2 sont deux telles courbes p.p.a.c., il existe un déplacement R de l'espace $\mathbf{R}^3$ tel que $\gamma_2 = R \circ \gamma_1$.