RÉSUMÉ 1

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

1.1 L'ESPACE $\mathbf{R^n}$

On distinguera l'espace vectoriel réel $\mathbf{R^n}$, dont les éléments sont des vecteurs, généralement écrits comme des vecteurs-colonne X ou comme $\mathbf{a}$ et l'espace affine $\mathbf{R^n}$ dont les éléments sont des points écrits par exemple comme P. Le translaté de P par le vecteur $\mathbf{a}$ s'écrit $Q = P + \mathbf{a}$. Le vecteur $\mathbf{a}$ est uniquement déterminé par les points P et Q et on écrit $\mathbf{a} = \overrightarrow{PQ}$.

On rappelle qu'un espace vectoriel E de dimension finie possède des bases et que deux bases ont même cardinalité ; cette cardinalité est la dimension de E. Le choix d'une base $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ de E définit un isomorphisme d'espace vectoriel

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbf{R}^n &\to E \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n \end{aligned}$$

et réciproquement. On dira que φ est une carte (linéaire) de E et que $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de $x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$ dans cette carte. Une autre base $(\underline{\mathbf{e}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{e}}_n)$ définit une autre carte $\underline{\varphi} : \mathbf{R}^n \to E$. Le diagramme suivant résume la situation :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R}^n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "A"'] & E \arrow[d, "Id"'] \\ \mathbf{R}^n \arrow[r, "\underline{\varphi}"] & E \end{tikzcd}$$

On a donc $\varphi = \underline{\varphi} \circ A$, où

$$A \in GL(n, \mathbf{R}) = \{\text{automorphismes linéaires de } \mathbf{R}^n\}$$

est la matrice de changement de bases. En notant par X le vecteur colonne des coordonnées d'un vecteur de E dans la base $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ et par $\underline{X}$ le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base $(\underline{\mathbf{e}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{e}}_n)$, on a la relation : $\underline{X} = AX$. On a aussi la relation

$$[\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}] = [\underline{\mathbf{e}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{e}}_n]A$$

Notons que le déterminant de A est ou bien strictement positif, ou bien strictement négatif. On dit que deux bases de E ont la même orientation si le déterminant de la matrice de changement de bases est strictement positif. Vérifiez que c'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases et qu'il y a deux classes d'équivalence appelées classes d'orientation. On appelle *orientation* de E le choix d'une classe d'orientation. Pour $\mathbf{R}^n$, on choisit implicitement l'orientation définie par la base canonique : $\mathbf{R}^n$ est un espace vectoriel orienté.

Une *forme quadratique* est une fonction $Q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ qui est de la forme $Q(x) =^t XAX$ où $A \in M_n(\mathbf{R})$ est une matrice symétrique et X est le vecteur-colonne des composantes de x.

On dit que la forme quadratique $Q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ (ou la matrice associée A) est *de type positif* si pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $Q(x) \geq 0$. On dit qu'elle est *définie positive* si pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ non nul, $Q(x) > 0$.

Proposition. *Une matrice symétrique $A \in M_n(\mathbf{R})$ est définie positive ssi ses n déterminants mineurs principaux sont strictement positifs.*

Théorème. *Soit $Q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une forme quadratique. Il existe une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$ et une matrice diagonale $D \in M_n(\mathbf{R})$ telles que Q soit donnée par $Q(x) =^t \underline{X}D\underline{X}$, où $\underline{X}$ est le vecteur-colonne des composantes de x dans cette base.*

Rappelons que : *Toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes et complètes.*

Elles définissent donc la même topologie. Sur $\mathbf{R}^n$, c'est la topologie produit. Notons que cette topologie est localement compacte et que les parties compactes sont exactement les parties fermées bornées. Une application linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie sur un autre est automatiquement continu. Etant donnés deux espaces vectoriels E et F, on note $L(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F. Si $F = E$, on note $L(E) = L(E, E)$

1.2 FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

On suppose connus la définition du graphe d'une fonction et de ses ensembles de niveau. Il faut savoir dessiner le graphe de $z = f(x, y)$ et les ensembles de niveau $F(x, y, z) = c$.

1.3 APPLICATIONS DIFFERENTIABLES

Soient E, F des espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E, $f : U \to F$ et $a \in U$. On dit que f est *différentiable* en a s'il existe $l \in L(E, F)$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + l(h) + o(h)$$

pour tout $h \in E$ tel que $a + h \in U$ et où $o(h)/\|h\|$ tend vers 0 quand h tend vers 0 (cette condition ne dépend pas de la norme utilisée). L'application linéaire l, si elle existe, est appelée *différentielle* de f au point a et est notée $l = df_a = d_a f = Df(a)$. (Quand $E = \mathbf{R}$, on identifie l'application linéaire $d_a f \in L(\mathbf{R}, F)$ et le vecteur $f'(a) = d_a f(1)$ qui est appelé *dérivée* de f au point a). Soit $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base de E et $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de $x \in E$ dans cette base. On a l'expression

$$d_a f(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(a)h_n$$

où la *dérivée partielle* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ est la dérivée en 0 de l'application partielle $t \mapsto f(a + te_i)$.

Si on se donne aussi une base de F, f est donnée par ses fonctions coordonnées $f_1, \dots, f_m$. La matrice $[\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)]$ de $d_a f$ relativement à ces bases est appelée *matrice jacobienne* de f en a. Quand $F = E$, le déterminant de $d_a f$ est appelé le *déterminant jacobien* de f en a.

On dit que f est *différentiable* si f est différentiable en tout $a \in U$. On peut alors considérer l'application $Df : U \to L(E, F)$. On dit que f est de classe C^1 si Df est continue. On note $D^2 f(a)$ la différentielle de Df en $a \in U$ si elle existe (on dit alors que f est deux fois différentiable en a). Dans une base de E, on a

$$D^2 f(a)(h)(k) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i k_j.$$

Théorème. *Si f est deux fois différentiable en $a \in U$, alors l'application bilinéaire $D^2 f(a) : E \times E \to F$ est symétrique.*

Quand $F = \mathbf{R}$, la matrice $[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)]$ s'appelle la *matrice hessienne* de f en a.

On définit par récurrence la k-différentiabilité de f et la propriété d'être de classe C^k. Une application f est de classe C^k ssi toutes ses dérivées partielles d'ordre $\leq k$ existent et sont continues. On dit que f est de classe C^∞ si f est de classe C^k pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Théorème (formule de Taylor à l'ordre 2) . *Soit $f : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^2, $x \in U$ et $h \in \mathbf{R}^n$ (de norme assez petite). Alors*

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)h_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)h_i h_j + o(\|h\|^2)$$

où $\frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2}$ tend vers 0 quand h tend vers 0.

Soit $f : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. On dit que a est un minimum (local) de f s'il existe un voisinage V de a tel que $f(x) \geq f(a)$ pour tout $x \in V$. Si $f(x) > f(a)$ pour $x \neq a$, on dit que le minimum est strict.

Théorème (CN du 1er ordre). *On suppose f différentiable. Si $a \in U$ est un minimum local, alors $Df(a) = 0$.*

Théorème (CN du 2eme ordre). *On suppose f C^2. Si $a \in U$ est un minimum local, alors $Df(a) = 0$ et la matrice hessienne $D^2f(a)$ est de type positif.*

Théorème (CS du 2eme ordre). *On suppose f C^2. Soit $a \in U$ tel que $Df(a) = 0$ et la matrice hessienne $D^2f(a)$ est définie positive. Alors a est un minimum local strict.*

1.4 THEOREMES D'INVERSION LOCALE ET DES FONCTIONS IMPLICITES

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f : U \to \mathbf{R}^n$ une application injective. On note $V = f(U)$ et $f^{-1} : V \to \mathbf{R}^n$ l'application réciproque. On dit que f est un *homéomorphisme* de U sur V si V est ouvert et f et f^{-1} sont continues. Si de plus f et f^{-1} sont différentiables, on dit que f est un *difféomorphisme* de U sur V. On dit que f est un difféomorphisme de classe C^k si f et f^{-1} sont de classe C^k. En fait, le théorème suivant montre qu'il suffit, si $k \geq 1$, de supposer f injective et de classe C^k.

Théorème (d'inversion locale). *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f : U \to \mathbf{R}^n$ une application de classe C^k avec $k \geq 1$. Soit $a \in U$ tel que $Df(a)$ soit une isomorphisme linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$. Alors, il existe U_1 voisinage ouvert de a contenu dans U tel que $f(U_1)$ soit ouvert et la restriction $f_{|U_1}$ soit un difféomorphisme de classe C^k de U_1 sur $f(U_1)$.*

Théorème (des fonctions implicites). *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$, où $p, q \in \mathbf{N}$ et*

$$F : (x,y) \in U \subset \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q \to F(x,y) \in \mathbf{R}^q$$

une application de classe C^k avec $k \geq 1$. Soit $(a,b) \in U$ tel que $F(a,b) = 0$ et la dérivée partielle $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b)$ (c'est une application linéaire de $\mathbf{R}^q$ dans $\mathbf{R}^q$) soit un isomorphisme. Alors, il existe V voisinage ouvert de a dans $\mathbf{R}^p$, W voisinage ouvert de b dans $\mathbf{R}^q$ et $f : V \to W$ de classe C^k tels que $V \times W \subset U$ et pour $(x,y) \in V \times W$,

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x).$$

De plus la différentielle de f en a est $Df(a) = \left[\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b)\right]^{-1} \circ \dfrac{\partial F}{\partial x}(a,b)$.

1.5 THEOREME DE CAUCHY-LIPSCHITZ

Théorème. *Soient U un ouvert de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ et $f : U \to E$, continue en (t,x) et localement lipschitzienne en x. Alors, pour tout $(t_0, x_0) \in U$, le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

admet une et une seule solution maximale.

On notera $x(t) = F(t, t_0, x_0)$ cette solution et $I(t_0, x_0)$ son domaine. L'application F est appelée le flot de l'équation.

Si f est de classe C^k, alors la solution est de classe C^{k+1} et F est de classe C^k.

Lorsque $f(t,x) = f(x)$ ne dépend pas de t (on dit alors que l'équation différentielle est autonome), le flot ne dépend que de $t - t_0$: $F(t, t_0, x_0) = F(t - t_0, x_0)$ et $I(t_0, x_0) = I(0, x_0) + t_0$.

Cas linéaire.

Dans le cas où l'équation différentielle est linéaire, on a des résultats plus complets :

Théorème. *Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et des applications continues $t \in I \mapsto A(t) \in L(\mathbf{R}^n)$, $t \mapsto b(t) \in \mathbf{R}^n$. On fixe $(t_0, x_0) \in I \times \mathbf{R}^n$. Alors le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x'(t) &= A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

admet une solution et une seule définie sur I. Elle est de la forme

$$x(t) = R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,s)b(s)ds$$

où R est une application de $I \times I$ dans le groupe $GL(n, \mathbf{R})$ des applications linéaires inversibles de $\mathbf{R}^n$ dans lui-même , appelée résolvante *(ou* flot intégral*) de A .*

Les solutions de l'équation sans second membre (ESSM) $x'(t) = A(t)x(t)$ forment un espace vectoriel de dimension n. Une base de cet espace vectoriel est appelé système fondamental de solutions.

Dans le cas où $A(t) = A$ ne dépend pas de t, la résolvante est $R(t, t_0) = \exp((t - t_0)A)$, où $\exp(A)$ est l'exponentielle de l'endomorphisme A.