Université d'Orléans — 21 novembre 2011
Département de Mathématiques
M1MA06

Problème $n°$ 4

On dit qu'une surface régulière est *minimale* si sa courbure moyenne est identiquement nulle.

On dit qu'une carte locale (φ, U) d'une surface régulière est *conforme* si $g_{11} \equiv g_{22}$ et $g_{12} \equiv 0$ sur U.

1) Montrer qu'une carte conforme (φ, U) est une application conforme de U sur $\varphi(U)$.

2) Soit S une surface régulière orientée minimale. Montrer que $T_p\mathbf{n}$ est une similitude en tout point $p \in S$ où $T_p\mathbf{n}$ est injective.

3) Soit (φ, U) une carte conforme d'une surface S avec les coordonnées $(u^1 = u, u^2 = v)$. On pose $\mathbf{e}_i = \partial_i\varphi = \partial\varphi/\partial u^i$.

a) Montrer que $< \partial_1\mathbf{e}_1 + \partial_2\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_i >= 0$ pour $i = 1, 2$.

b) En déduire que $\partial_1\mathbf{e}_1 + \partial_2\mathbf{e}_2 = -2\lambda^2 H\mathbf{n}$ où $\lambda^2 = g_{11}$ et H est la courbure moyenne de S.

c) Montrer que $\varphi(U)$ est minimale si et seulement si les fonctions coordonnées $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ de φ sont harmoniques, c'est-à-dire vérifient l'équation de Laplace

$$\partial^2\varphi_\alpha/\partial u^2 + \partial^2\varphi_\alpha/\partial v^2 = 0$$

4) On considère dans le plan Oyz la courbe C d'équation $y = f(z)$ avec $f > 0$ et de classe C^2. Montrer que la surface de révolution engendrée par la rotation de C autour de l'axe des z est minimale si et seulement si

$$\frac{f''}{1 + f'^2} = \frac{1}{f}$$

Intégrer cette équation au voisinage d'un point où $f' \neq 0$ (on pourra multiplier les deux côtés par f'). Conclusion ?

5) Montrer que $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ avec

$$\phi_1(u, v) = \sinh v \sin u,\ \ \phi_2(u, v) = \sinh v \cos u,\ \ \phi_3(u, v) = u$$

où $(u, v) \in]0, 2\pi[\ \times \mathbf{R}$ est une paramétrisation conforme d'un hélicoïde et que cette surface est minimale.

6) Montrer que $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ avec

$$\psi_1(u, v) = \cosh v \cos u,\ \ \psi_2(u, v) = -\cosh v \sin u,\ \ \psi_3(u, v) = v$$

où $(u,v) \in]0,2\pi[\times \mathbf{R}$ est une paramétrisation conforme d'un caténoïde et que cette surface est minimale.

7) Montrer que $(\phi_\alpha, \psi_\alpha) \quad (\alpha = 1,2,3)$ vérifie les équations de Cauchy-Riemann :

$$(*) \qquad \begin{cases} \partial\phi_\alpha/\partial v &= -\partial\psi_\alpha/\partial u \\ \partial\phi_\alpha/\partial u &= \partial\psi_\alpha/\partial v \end{cases}$$

8) On pose $\phi^t(u,v) = \cos t\ \phi(u,v) + \sin t\ \psi(u,v)$. Montrer que l'on obtient ainsi une famille à un paramètre t de surfaces paramétrées régulières conformes et minimales. Montrer que ces surfaces ont la même première forme fondamentale.

9) Pour (u,v) fixé, montrer que la courbure de Gauss $K_t(\phi^t(u,v))$ de ϕ^t en $\phi^t(u,v)$ ne dépend pas de t.

10) Montrer que les résultats 8 et 9 sont vrais pour tout couple (ϕ,ψ) de surfaces régulières conformes minimales vérifiant les équations de Cauchy-Riemann $(*)$.

11) Donner une paramétrisation conforme de la sphère

$$\mathbf{S} = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$