Université d'Orléans 24 octobre 2011
Département de Mathématiques
M1MA06

Problème n° 3

Première Partie

Soient S_1 et S_2 deux surfaces régulières dans $\mathbf{R}^3$ et f une application de classe C^1 de S_1 dans S_2. Soit $a \in S_2$ tel que pour tout $p \in f^{-1}(a)$, T_pf est de rang 2 (on dit alors que a est une *valeur régulière* de f).

1) Soit $p \in f^{-1}(a)$. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de p tel que la restriction de f à U soit un difféomorphisme de U sur un voisinage ouvert de a. (On dit alors que f est un difféomorphime local en p).

2) Montrer que $f^{-1}(a)$ est un sous-espace topologique discret de S_1.

3) On suppose maintenant que S_1 est compacte. Montrer que $f^{-1}(a)$ n'a qu'un nombre fini de points.

4) Sous les mêmes hypothèses, montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que tout $b \in V$ soit une valeur régulière de f et que $f^{-1}(b)$ ait le même nombre de points que $f^{-1}(a)$.

Deuxième Partie

On se propose de donner une nouvelle démonstration du théorème fondamental de l'algèbre :

Tout polynôme non constant $P \in \mathbf{C}[X]$ possède au moins un zéro dans $\mathbf{C}$.

Soit P un polynôme non constant à coefficients complexes. Nous identifierons le plan $z = 0$ de $\mathbf{R}^3$ avec le plan complexe en posant $\xi = x + iy$. Soit $\mathbf{S}$ la sphère dans $\mathbf{R}^3$ de centre O et de rayon 1. Nous notons θ_+ la projection stéréographique à partir du pôle nord.

1) Montrer que l'application $f : \mathbf{S} \to \mathbf{S}$ définie par

$$\begin{aligned} f(p) &= (\theta_+^{-1} \circ P \circ \theta_+)(p) \\ f(0,0,1) &= (0,0,1) \end{aligned}$$

est de classe C^∞.

2) Montrer que l'ensemble F des points $p \in \mathbf{S}$ tels que f n'est pas un difféomorphisme local en p, est fini.

3) Montrer que tout $a \in \mathbf{S} \setminus f(F)$ est une valeur régulière de f et que le nombre de points de $f^{-1}(a)$ ne dépend pas de $a \in \mathbf{S} \setminus f(F)$ (utiliser la connexité de $\mathbf{S} \setminus \mathbf{f(F)}$).

4) En déduire que $f(\mathbf{S}) = \mathbf{S}$ (utiliser le fait que l'image de f ne peut pas être réduite à un nombre fini de points) et que $P(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$. En déduire le théorème fondamental de l'algèbre.