Université d'Orléans 19 Février 2013
Département de Mathématiques
M1MT06

Problème n^0 2

Exercice 1

1) Soit $\alpha : I \to \mathbf{R}^2$ une courbe paramétrée régulière de classe C^3 paramétrée par l'abscisse curviligne. On note $\mathbf{T}$ le vecteur unitaire tangent et $\mathbf{N}$ le vecteur déduit de $\mathbf{T}$ par une rotation de $\pi/2$. A quelle condition peut-on trouver une fonction $\lambda : I \to \mathbf{R}$ telle que $\beta = \alpha + \lambda\mathbf{N}$ définisse une courbe paramétrée dont la tangente en $\beta(t)$ soit la normale à α en $\alpha(t)$? La courbe β s'appelle alors la *développée* de α.

2) Réciproquement, une courbe paramétrée β étant donné, déterminer les courbes α admettant β comme développée. Ces courbes sont appelées les *développantes* de β. Etudier les centres de courbure des courbes α.

3) Etudier développée et développantes de la spirale logarithmique définie dans $\mathbf{C}$ par $z = \exp wt$ où $w = a + ib$ et $a \neq 0, b \neq 0$.

Exercice 2

Soit $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace affine euclidien de dimension 3. Soit C_h le cercle de centre O et de rayon 1 dans le plan horizontal $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$. On fait rouler sans glisser le long de C_h un cercle vertical C_a de rayon a. On étudie la courbe $\mathcal{C}$ décrite par un point fixé sur le cercle C_a.

1) Donner une paramétrisation $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ de la courbe $\mathcal{C}$ telle que $\alpha(0) = (1, 0, 2a)$ en choisissant comme paramètre t l'angle décrit sur le cercle horizontal par le point de contact entre les deux cercles.

2) La courbe paramétrée α est-elle périodique ? (discuter suivant les valeurs de a)

3) La courbe α admet-elle des points singuliers ? Donner la direction de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en ces points éventuels.

4) Pour $a = 1$, calculer la longueur de l'arc de la courbe $\mathcal{C}$ correspondant à un tour, le long du cercle horizontal, du point de contact.

5) Pour $a = 1$, comparer la courbe $\mathcal{C}$ avec la cycloïde.