Université d'Orléans 22 Janvier 2013
Département de Mathématiques
M1MA06

Problème n^0 1

Partie I : *Lemme de Hadamard.*

1) Soient U un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$, f une fonction réelle de classe C^∞ de domaine U et $a \in U$. Montrer qu'il existe des fonctions $g_1, \dots, g_n$ de classe C^∞ de domaine U telles que pour tout $x \in U$,

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} g_i(x)(x_i - a_i)$$

et montrer que $g_i(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

2) Soient U un ouvert quelconque de $\mathbf{R}^n$, f une fonction réelle de classe C^∞ de domaine U. On dit que $a \in U$ est un *point régulier* de f si $f'(a) \neq 0$. Montrer que si $a \in U$ est un point régulier de f, alors il existe un difféomorphisme φ de classe C^∞ d'un voisinage ouvert V de 0 dans $\mathbf{R}^n$ sur un voisinage ouvert W de a tel que $a = \varphi(0)$ et

$$f \circ \varphi(y) = f(a) + y_1$$

pour tout $y \in V$. (Indication : construire d'abord $\psi = \varphi^{-1}$ tel que $y_1 = \psi_1(x)$ ait l'expression souhaitée.)

Partie II : *Lemme de Morse.*

1) Soient U un voisinage ouvert convexe de 0 dans $\mathbf{R}^n$, f une fonction réelle de classe C^∞ de domaine U. On suppose que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe des fonctions b_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ de classe C^∞ de domaine U telles que pour tout $x \in U$,

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{m} b_{ij}(x) x_i x_j = {}^t x B(x) x\,.$$

Montrer que pour tout $x \in U$, $B(x) = [b_{ij}(x)]$ est une matrice symétrique. Montrer que $B(0) = \frac{1}{2} H_0 f$, où $H_0 f = [(\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j)(0)]$ est la matrice hessienne de f en 0. (Indication : utiliser la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1.)

2) Soit $\mathrm{Sym}(n)$ l'espace vectoriel réel des matrices symétriques $n \times n$ à coefficients réels et $A \in \mathrm{Sym}(n)$ inversible. On définit l'application $\theta_A : M_n(\mathbf{R}) \to \mathrm{Sym}(n)$ par

$\theta_A(M) = {}^tMAM$. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de A dans $\mathrm{Sym}(n)$, un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de I dans $M_n(\mathbf{R})$ et une application $g : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ de classe C^∞ tels que pour tout $Y \in \mathcal{U}$, on ait $Y = {}^tg(Y)Ag(Y)$.

3) On suppose que la matrice hessienne $H_0 f$ est inversible. On utilise les notations des questions 1) et 2) avec $A = B(0)$. Montrer qu'il existe des voisinages ouverts V, W de 0 dans $\mathbf{R}^n$ et un difféomorphisme ϕ de V sur W envoyant 0 sur 0 tels que pour tout $x \in V$,

$$f(x) = {}^t\phi(x)A\phi(x)\,.$$

4) Soient U un ouvert quelconque de $\mathbf{R}^n$, f une fonction réelle de classe C^∞ de domaine U. On dit que $a \in U$ est un *point critique non dégénéré* de f si $f'(a) = 0$ et la forme hessienne $H_a f$ de f en a est non dégénérée. Montrer que si $a \in U$ est un point critique non dégénéré de f, alors il existe un difféomorphisme φ de classe C^∞ d'un voisinage ouvert V de 0 dans $\mathbf{R}^n$ sur un voisinage ouvert W de a et un entier $1 \leq r \leq n$ tels que $a = \varphi(0)$ et

$$f \circ \varphi(x) = f(a) + x_1^2 + \ldots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \ldots - x_n^2$$

pour tout $x \in V$. Montrer que l'entier r ne dépend que de la forme quadratique $H_a f$.