UNIVERSITÉ D'ORLÉANS **2000-2001**
U.F.R. Faculté des Sciences **Unité MA8.01.**
Maîtrise de Mathématiques

FEUILLE D'EXERCICES 9

Distributions

---

1 - Etudier les limites dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, quand n tend vers l'infini, de (f_n) et (F_n) définies par :

$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}, \qquad F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,dt$$

---

2 - Calculer les limites quand h tend vers 0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de :

$$\frac{\delta_h - \delta_{-h}}{2h}\ ; \qquad \frac{\delta_{2h} + \delta_{-2h} - 2\delta_0}{4h^2}$$

---

3 - Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on pose :

$$T_\lambda(\Phi) = \lim_{\alpha \to 0^+} \int_{|x|>\alpha} \frac{\cos \lambda x}{x} \Phi(x)\,dx$$

a) Montrer qu'on définit bien ainsi une distribution T_λ sur $\mathbb{R}$.

b) Etudier les limites dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de T_λ lorsque $\lambda \to 0$ et $\lambda \to +\infty$.

---

4 - a) Les fonctions $\frac{Y}{x}$ et $\frac{Y}{x^2}$ sont-elles localement intégrables sur $\mathbb{R}$?

b) Pour Φ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, on pose :

$$< Pf(\frac{Y}{x}), \Phi >= \lim_{\alpha \to 0^+} \left(\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{\Phi(x)}{x}\,dx + \Phi(0) \ln \alpha \right)$$

$$< Pf(\frac{Y}{x^2}), \Phi >= \lim_{\alpha \to 0^+} \left(\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{\Phi(x)}{x^2}\,dx - \frac{\Phi(0)}{\alpha} + \Phi'(0) \ln \alpha \right)$$

Montrer que l'on définit bien ainsi deux distributions sur $\mathbb{R}$. Quels sont leurs ordres? Quelles sont leurs restrictions à $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$?

c) Calculer la dérivée de $Pf(\frac{Y}{x})$ et $Y \ln x$.

5 - Calculer les dérivées premières et secondes de $\mid x \mid$ et $\mid \sin x \mid$.

6 - Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction de classe C^k sur $\mathbb{R} - \{a\}$ dont chaque dérivée admet une limite à droite et à gauche en a. Montrer que la dérivée d'ordre k de la distribution T_f associée à f vérifie :

$$T_f^{(k)} = T_{f^{(k)}} + S(f, a)\delta_a^{(k)} + \cdots + S(f^{(k-1)}, a)\delta_a$$

(où $S(g, a) = g(a^+) - g(a^-)$ désigne le saut de g en a).

7 - Calculer au sens des distributions :

$$(\frac{d}{dx} - \lambda)Y(x)e^{\lambda x}$$

$$(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2)Y(x)\frac{\sin(\omega x)}{\omega}$$

$$\frac{d^m}{dx^m}Y(x)\frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \qquad m \in \mathbb{N}^*$$

8 - a) Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, l'équation :

$$\frac{d}{dx}T + T = \delta$$

(chercher une solution particulière de la forme Yf où f est continûment dérivable).

b) Résoudre

$$\frac{d^2}{dx^2}T + 2\frac{d}{dx}T + T = \delta + \delta'$$

Montrer que T définie par $< T, \Phi >= \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^{(n)}(n)$, $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est une distribution d'ordre infini sur $\mathbb{R}$.

9 - Trouver toutes les distributions sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$xT = 0 \; ; \qquad xT = 1 \; ; \qquad x^2T = 0$$