UNIVERSITÉ D'ORLÉANS **2000-2001**
U.F.R. Faculté des Sciences **Unité MA8.01.**
Maîtrise de Mathématiques

FEUILLE D'EXERCICES 7

---

1 - Soient H un espace de Hilbert, (e_n) une suite orthonormale de H et (λ_n) une suite bornée de nombres complexes non nuls. Si $x \in H$, on pose $Tx = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n < x, e_n > e_n$.
a) Montrer que l'on définit ainsi un opérateur continu et normal T sur H.
b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que T soit compact.
c) Déterminer l'ensemble des valeurs propres non nulles de T et les sous-espaces propres associés.

2 - a) Soient $E = \mathcal{C}([0,1])$ muni de la norme $\| \|_\infty$,et V l'application de E dans lui-même définie par $Vf(x) = \int_0^x f(t)dt$ pour $f \in E$. Montrer que V est un opérateur compact et déterminer son spectre.
b) On munit $[0,1]$ de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue, et on note encore V l'opérateur sur $L^2([0,1])$ défini par $Vf(x) = \int_{[0,x]} f(t)dt$.
(i) Montrer que V est une application linéaire continue et compacte de $L^2([0,1])$ dans lui-même.
(ii) Montrer que pour tout $f \in L^2([0,1]$ la fonction $V(f)$ est continue. En déduire que V est injective et non surjective.
(iii) Montrer que $\sigma(V) = \{0\}$.
(iv) Déterminer l'adjoint de V et montrer que V^*V est défini par un noyau que l'on déterminera.
(v) Soient $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Montrer que pour $f \in E$ on a

$$V^*Vf = \lambda f \iff f \in \mathcal{C}^2([0,1]) \ , \ f(1) = f'(0) = 0 \ , \ f + \lambda f'' = 0 \ .$$

En déduire les valeurs propres, les sous-espaces propres de V^*V et le spectre de V^*V.
(vi) Déterminer la norme de V^*V et de V.

3 - Soient A un opérateur compact positif sur un espace de Hilbert H, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite décroissante de ses valeurs propres strictement positives comptées avec leur ordre de multiplicité, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite orthonormale de vecteurs propres associés. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ soit E_n le sous-espace vectoriel engendré par $\{e_1, \ldots, e_n\}$.
a)Montrer que $\lambda_n = min\{< Ax, x >; \|x\| = 1 \quad et \quad x \in E_n\}$.
b)Soit V un sous-espace vectoriel de H de dimension n. Montrer que $E_{n-1}^\perp \cap V \neq \{0\}$. En déduire que, $\lambda_n \geq min\{< Ax, x >; \|x\| = 1 \quad et \quad x \in V\}$.
c) En déduire que $\lambda_n = \max_V\{min_x\{< Ax, x >; \|x\| = 1 \, , \, x \in V\} \, ; \dim V = n\}$.