UNIVERSITÉ D'ORLÉANS **2000-2001**
U.F.R. Faculté des Sciences **Unité MA8.01.**
Maîtrise de Mathématiques

FEUILLE D'EXERCICES 5

Espace de mesures. Mesure de Radon-Stieltjes

1 - Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesuré et $\mathcal{M} = \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ l'espace vectoriel des mesures finies sur $(X, \mathcal{A})$. On definie

$$|| \mu ||= \sup\{| \mu | (E); E \in \mathcal{A}\}$$

où $| \mu | (E) = \sup\{\sum_n | \mu(E_n) |;$ où les $(E_n)_n$forment une partition de $E\}$
a) Montrer que $(\mathcal{M}, || \, ||)$ est un espace vectoriel normé.
Soit $(\mu_n)_n$ une suite de mesures réelles finies telle que $\lim_{n,m} || \mu_n - \mu_m ||= 0$.
b) Montrer que $\lim_n \mu_n(E)$ converge uniformément par rapport à $E \in \mathcal{A}$ vers une limite notée $\mu(E)$.
c) Montrer que μ est une mesure réelle finie.
d) En déduire $(\mathcal{M}, || \, ||)$ est un espace de Banach.

2 - I. Soit $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On dit que Δ est une subdivision de $[a, b]$ de pas $p(\Delta)$ si :

$$\Delta = \{\{x_0, \cdots, x_n\} \text{ avec } x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$$

et $p(\Delta) = \sup_{j=0,(n-1).} | x_{j+1} - x_j |$. Pour $f \in C^{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ à support dans $[a, b]$, on pose :

$$S_\Delta(f) = \sum_{j=0}^{n-1} \sup(f(x); x \in [x_j, x_{j+1}] \;)\{\alpha(x_{j+1}) - \alpha(x_j)\}$$

et

$$s_\Delta(f) = \sum_{j=0}^{n-1} \inf(f(x); x \in [x_j, x_{j+1}])\{\alpha(x_{j+1}) - \alpha(x_j)\}$$

1) Montrer que:

$$0 \leq S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \leq (\alpha(b) - \alpha(a)) \sup\{| f(x) - f(y) |, | x - y | \leq p(\Delta), \; x, y \in [a, b]\}$$

2) Calculer la limite $\displaystyle\lim_{p(\Delta) \longrightarrow 0} S_\Delta(f) - s_\Delta(f)$.

On note $\Delta_1 \subset \Delta_2$ pour deux subdivisions si tous les points de Δ_1 sont des points de Δ_2.

3) a) Montrer que S_Δ et s_Δ sont monotones pour cette inclusion.

b) Montrer que les deux quantités $\inf_\Delta \; S_\Delta(f)$ et $\sup_\Delta \; s_\Delta(f)$ existent dans $\mathbb{R}$.

c) En déduire que les limites $\lim\limits_{p(\Delta)\longrightarrow 0} S_\Delta(f)$ a,b et $\lim\limits_{p(\Delta)\longrightarrow 0} s_\Delta(f)$ existent ainsi que la relation:

$$\lim_{p(\Delta)\longrightarrow 0} S_\Delta(f) = \lim_{p(\Delta)\longrightarrow 0} s_\Delta(f)$$

On définie $I_\alpha^{a,b}(f) = \lim\limits_{p(\Delta)\longrightarrow 0} S_\Delta(f)$ la valeur commune obtenue dans c).

4) a) Montrer que les valeurs $I_\alpha^{a,b}(f)$ ne dépendent pas de a, b tels que $supp\, f \subset [a, b]$. On notera plus simplement $I_\alpha^{a,b}(f) = I_\alpha(f)$.

b) Montrer que I_α définie une mesure de Radon positive sur l'espace des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}$.

On note $d\alpha$ la mesure borélienne associée à I_α par le théorème de Radon-Riesz . On écrit alors:

$$I_\alpha(f) = \int_a^b f\, d\alpha$$

I_α est appelée intégrale de Stieltjes et $d\alpha$ la mesure de Stieltjes.

c) Montrer la relation de Chasles : pour tout $c \in \mathbb{R}$ tel que $a < c < b$,

$$\int_a^b f\, d\alpha = \int_a^c f\, d\alpha + \int_c^b f\, d\alpha$$

d) Qu'obtient-on si $\alpha(x) = x$?

5) Montrer que si $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$ alors $d\alpha\,(]a, b[) = \alpha(b_-) - \alpha(a_+)$. En déduire $d\alpha(]a, b])$. ($\alpha(x^+)$ et $\alpha(x^-)$ désigne respectivement la limite à droite et à gauche de α en x).

II. Le but de cette partie est la réciproque du résultat précédent. Soit μ une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}$ alors il existe une unique fonction croissante α, continue à droite et nulle en 0 tel que $\mu = d\alpha$.

1) a) Montrer l'unicité de α en calculant $\mu(]0, x])$ pour $x > 0$ et $\mu(]x, 0])$ pour $x < 0$.

b) Montrer l'existence de α et de la relation $\mu = d\alpha$.

Supposons de plus μ finie sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique fonction croissante β continue à droite et majorée et telle que $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} \beta(x) = 0$ pour laquelle $\mu = d\beta$ [Considérer la fonction de répartition associée à μ].

2) Calculer β pour la mesure de Dirac δ_a où $a \in \mathbb{R}$.

3) Supposons $\alpha \in C^1(\mathbb{R})$, croissante. Montrer qu'alors, pour toute $f \in C(\mathbb{R})$ à support compact,

$$\int f\, d\alpha = \int f(x)\alpha'(x)\, dx$$

où dx désigne l'intégrale de Riemann.

3 - Soit μ une mesure réelle finie sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A})$ tel que $\mid \mu \mid (E) < +\infty$ pour (tout) $E \in \mathcal{A}$. Montrer alors que :

$$\mid \mu \mid (E) = \sup\{ \left| \int_E f \, d\mu \right| , \mid\mid f \mid\mid_\infty \leq 1 \text{ et } f \in L^1(\mid \mu \mid) \}$$