**UNIVERSITÉ D'ORLÉANS** **2000-2001**
**U.F.R. Faculté des Sciences** **Unité MA8.01.**
**Maîtrise de Mathématiques**

# FEUILLE D'EXERCICES 4

## Théorèmes de Stone-Weierstrass , d'Ascoli. Topologie faible

**1 -** On considère l'algèbre $A = \mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0,1])$ des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs réelles, munie de la norme de la convergence uniforme. On note $G$ la sous-algèbre des fonctions de classe $C^1$.
a) Montrer que $G$ est dense dans $A$.
b) Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $G$, fermé dans $A$.
b.1) Montrer que l'application $f \longmapsto f'$ est continue de $F$ dans $A$.
b.2) Montrer que la boule unité fermé e $B_F$ de $F$ est compacte.
b.3) Quelle conclusion peut-on tirer pour $F$?

**2 -** Soit $K : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Si $f \in \mathcal{C}([0,1])$ on pose $T_K f(t) = \int_0^t K(t,s) f(s) ds$.
a)Montrer que $T_K$ est une application linéaire continue de $\mathcal{C}([0,1])$ dans lui-même.
b) Montrer que $\{T_K f\,;\, \|f\|_\infty \leq 1\}$ est équicontinu. En déduire que, pour tout $r > 0$, l'ensemble $T_K(\overline{B}(0,r))$ est relativement compact.

**3 -** Soit $E$ un espace vectoriel normé.
a) Soit $a \in E$. Montrer que la translation de vecteur $a$ est un homéomorphisme de $(E, \sigma(E, E'))$ dans lui-même.
b) Montrer que l'addition est faiblement continue de $E \times E$ dans $E$ et que la multiplication par un scalaire est faiblement continue de $\mathbb{K} \times E$ dans $E$.

**4 -** Soit $E$ un espace de Banach. Montrer qu'il existe un compact $K$ tel que $E$ s'identifie (en tant qu'espace vectoriel normé) à un sous-espace fermé de $(\mathcal{C}(K), \|\ \|_\infty)$. (on prendra pour $K$ la boule unité fermée de $E'$).

**5 -** Soient $E$ un espace vectoriel normé , $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $E$ et $x \in E$.
a) Soit $F$ un ensemble total dans $E'$. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers $x$ si et seulement si elle est normiquement bornée et si pour tout $f \in F$ la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$.
b) Si $E$ est un espace de Hilbert admettant $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ pour base hilbertienne, montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers $x$ si et seulement si elle est normiquement bornée et si pour tout $\alpha \in I$ la suite $(< x_n\,,\, e_\alpha >)$ converge vers $< x\,,\, e_\alpha >$.
c) Si $E = c_0$ ou $E = \ell^p$ avec $1 < p < \infty$, montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers $x$ si et seulement si elle est normiquement bornée et si pour tout $k \in \mathbb{N}$ la suite $(x_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $x^k$. ( Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = (x_n^k)_{k \in \mathbb{N}}$).

**6 -** Soient $H$ un espace de Hilbert et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $H$. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge normiquement vers $x$ si et seulement si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers $x$ et $(\|\, x_n \,\|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\|\, x \,\|$.

**7 -** Soient $E$ un espace vectoriel norméet $E'$ son dual topologique.
a) Montrer que la topologie normique de $E$ est plus fine que la topologie faible $\sigma(E, E')$. Comparer sur $E'$ la topologie normique $\tau_{\mathcal{N}}$ et les topologies $\sigma(E', E)$ et $\sigma(E', E'')$.
b) Montrer que si $E$ est de dimension finie alors la topologie normique et la topologie faible coïncident.
c) On suppose maintenant que $E$ est de dimension infinie.
c.1) Soient $f_1, \ldots, f_n$ des formes linéaires sur $E$. Montrer que $\bigcap_{i=1}^{n} Ker(f_i)$ est un sous-espace vectoriel de dimension infinie. En déduire que tout voisinage faible de 0 contient un sous-espace vectoriel de dimension infinie.
c.2) Montrer que l'intérieur faible de la boule unité (normique) est vide, l'adhérence faible de la sphére unité (normique) est la boule unité fermée.
c.3) Montrer que la topologie normique est strictement plus fine que la topologie faible.

**8 -** Soit $E$ un espace vectoriel normé.
a) Soit $f$ une forme linéaire sur $E$. Montrer que $f$ est normiquement continue si et seulement si $f$ est faiblement continue, c'est à dire $\big(E, \sigma(E, E')\big)' = E'$.
b) Soit $\ell$ une forme linéaire sur $E'$.
b.1) Montrer que $\ell$ est continue pour la topologie faible $\sigma(E', E'')$ si et seulement si $\ell \in E''$.
b.2) Montrer que $\ell$ est continue pour la topologie $*$-faible $\sigma(E', E)$ si et seulement si $\ell \in J_E(E)$. (Si $\ell$ est $*$-faiblement continue montrer qu'il existe $x_1, \cdots, x_n$ dans $E$ tels que le sous-espace vectoriel $\bigcap_{i=1}^{n} \{f \in E' \,;\, f(x_i) = 0\}$ est inclus dans $\Omega = \{f \in E' \,;\, |\ell(f)| < 1\}$ ).

**9 -** Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels normés et $T$ une application linéaire de $E$ dans $F$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
a) $T$ est continue de $(E, \| \, \|)$ dans $(F, \| \, \|)$ ($T$ normiquement continue).
b) $T$ est continue de $(E, \sigma(E, E'))$ dans $(F, \sigma(F, F'))$ ($T$ faiblement continue).
c) $T$ est continue de $(E, \| \, \|)$ dans $(F, \sigma(F, F'))$.

**10 -** Montrer que l'adhérence faible d'une partie convexe d'un espace normé est égale à son adhérence normique. (Pour montrer que l'adhérence faible est contenue dans l'adhérence normique, utiliser la forme géométrique du théorème de Hahn-Banach).

**11 -** Soit $E$ un espace vectoriel normé et $A$ une partie de $E$.
a) Montrer qu'il existe un plus petit convexe contenant $A$, noté $\mathrm{co}(A)$ et appelé *enveloppe convexe* de $A$. Montrer que l'enveloppe convexe de $A$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de suites finies d'éléments de $A$.
b) Montrer que si $x \in E$ est limite faible d'une suite d'éléments de $A$, alors il est normiquement adhérent à l'enveloppe convexe de $A$.

**12 -** a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x = (x_n)$ de $\ell^\infty$ on pose $\delta_n(x) = x_n$. Montrer que $(\delta_n)$ est une suite de la boule unité du dual de $\ell^\infty$, n'admettant pas de sous-suite $*$-faiblement convergente.
b) En déduire qu'un espace compact n'est pas nécessairement séquentiellement compact.
c) Que peut-on déduire du a) à propos de la séparabilité de $\ell^\infty$?