UNIVERSITÉ D'ORLÉANS **2000-2001**
U.F.R. Faculté des Sciences **Unité MA8.01.**
Maîtrise de Mathématiques

FEUILLE D'EXERCICES 2

THÉORÈME DE HAHN-BANACH

1 - Soit E un espace vectoriel réel, p une fonction sous-linéaire sur E. Montrer que pour tout x de E il existe une forme linéaire f sur E telle que $f(x) = p(x)$ et $f \leq p$. Que peut-on dire s'il existe une seule forme linéaire majorée par p ?

2 - Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, p une fonction sous-linéaire sur E, H un hyperplan de E, f une forme linéaire sur H telle que $f \leq p$.
On suppose que $x \notin H$ et $\inf_{y \in H}(p(x+y) - f(y)) = \sup_{y \in H}(f(y) - p(y-x))$. Montrer qu'il existe une unique forme linéaire g sur$E$ prolongeant f et telle que $g \leq p$. Que vaut alors $g(x)$?

3 - Soient E un espace vectoriel normé, x et y des éléments distincts de E. Montrer qu'il existe une forme linéaire continue f sur E telle que $f(x) \neq f(y)$.

4 - Soient E un espace vectoriel normé,$x \in E$.montrer que $\|x\| \leq 1$ si et seulement si pour toute forme linéaire continue f sur E telle que $\|f\| \leq 1$, on a, $|f(x)| \leq 1$.

5 - Soient E un espace vectoriel normé, V un sous-espace vectoriel de E, f une forme linéaire continue sur V. Montrer qu'il existe une forme linéaire continue prolongeant f à E, de même norme que f. Ce prolongement est il unique?(Considérer une forme linéaire sur une droite de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme, $\|(x_1, x_2)\| = \max(|x_1|, |x_2|)$ puis $\|(x_1, x_2)\| = |x_1| + |x_2|$).
Montrer que si E est un espace de Hilbert ce prolongement est unique et s'annule sur $V^\perp$.

6 - Soient E un espace vectoriel normé, V un sous-espace vectoriel de E, $x \in E$ tel que $d(x, V) > 0$ (on rappelle que $d(x, V) = \inf\{\|x - y\| \ / \ y \in V\}$).
Montrer qu'il existe une forme linéaire f, continue sur E, s'annulant sur V et telle que

$$f(x) = 1 \ , \ \|f\| = \frac{1}{d(x, V)}$$

En déduire que V est dense dans E si et seulement si la seule forme linéaire continue sur E s'annulant sur V est nulle.

7 - Montrer qu'il existe une forme linéaire L, continue sur l^∞, telle que pour tout $x = (x_n)$ de l^∞ on ait, $\underline{\lim}\, x_n \leq L(x) \leq \overline{\lim}\, x_n$.

8 - Soit X un espace métrique. On désigne par $\mathcal{C}_b(X)$ l'espace des fonctions continues et bornées de X dans $\mathbb{R}$. Soient V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_b(X)$ tel que $\mathbf{1} \in \mathbf{V}$ et φ une forme linéaire sur V telle que pour tout $f \in V, f \geq 0 \Rightarrow \varphi(f) \geq 0$. (On dit alors que φ est positive).

a) Montrer que φ est continue sur V muni de la norme de convergence uniforme.

b) Pour $f \in \mathcal{C}_b(X)$ on pose, $p(f) = \sup\limits_{x \in X} (f(x))^+$. Montrer que p est une fonction sous-linéaire sur $\mathcal{C}_b(X)$.

c) En déduire qu'il existe une forme linéaire ϕ sur $\mathcal{C}_b(X)$ prolongeant φ et vérifiant,

$$\forall f \in \mathcal{C}_b(X), f \geq 0 \Rightarrow \phi(f) \geq 0$$

d) On suppose X compact. A l'aide du théorème de Riesz, montrer qu'il existe une mesure de Radon positive μ sur X telle que pour toute f de Von ait, $\varphi(f) = \int f d\mu$.

9 - Pour tout $x = (x_n) \in l^\infty$ on pose, $p(x) = \inf\{ \overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \dfrac{1}{m} \sum\limits_{j=1}^{m} x_{n+p_j} \,/\, m \in N^*, p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{N}\}$.

a) Montrer que p est une fonction sous-linéaire sur l^∞. (Majorer $p(x+y)$ par,

$$\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \left(\frac{1}{mm'} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m'} x_{n+p_j+q_k} + y_{n+p_j+q_k} \right)$$

avec $m, m', p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_{m'}$ convenables).

b) En déduire l'existence d'une forme linéaire L sur l^∞ , vérifiant les propriétés:

(i) Si $x = (x_n)$ converge alors $L(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$.

(ii) Si pour tout $n, x_n \geq 0$, alors $L(x) \geq 0$.

(iii) Si $x = (x_n)$ et $x' = (x_{n+1})$, alors, $L(x) = L(x')$.

(Pour ce dernier point on pourra montrer que pour tout entier m, $p(x - x') \leq \frac{2\|x\|_\infty}{m}$).

On appelle L une limite de **Banach**.

10 - Soit E un espace vectoriel normé, $x = (x_n)$ un système libre d'éléments de E, (α_n) une suite de nombres complexes, M un réel > 0. Montrer que pour qu'il existe une forme linéaire f continue sur E, de norme $\leq M$, vérifiant $f(x_n) = \alpha_n$ pour tout entier n, il faut et il suffit que pour tout entier n et toute suite finie $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de nombres complexes on ait,

$$|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k| \leq M \| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \|$$

11 - Soient E et F des espaces normés, T une application linéaire continue de E dans F. Montrer que , $T' : F' \to E', f \mapsto f \circ T$, est linéaire continue de même norme que T. (On appelle T' l'opérateur conjugué de T).

12 - Pour $0 < \alpha < 1$, soit u_α la suite,$u_\alpha = (\alpha^n)_{n \geq 0}$. Montrer que le sous-espace V de c_0 engendré par $(u_\alpha)_{0<\alpha<1}$ est dense dans c_0. (On rappelle que le dual de c_0 est isométriquement isomorphe à l^1).

13 - Soient X un espace métrique compact, F un fermé de X. On désigne par $\mathcal{C}(X)$ l'espace des fonctions continues sur X à valeurs réelles. Soit V un sous-espace de $\mathcal{C}(X)$ tel que $\mathbf{1} \in V$ et tel que toute $f \in V$ à valeurs positives sur F est positive sur X.

1) a) Montrer que pour toute $f \in V$ on a, $\sup_{x \in X} |f(x)| = \sup_{x \in F} |f(x)|$.

b)Soit $x \in X$. Montrer qu'il existe une forme linéaire φ positive sur $V_F = \{f_{|F} \, / f \in V\}$ telle que pour toute $f \in V$ on ait $f(x) = \varphi(f_{|F})$. En déduire l'existence d'une forme linéaire ψ positive sur $\mathcal{C}(F)$ telle que pour toute $f \in V, f(x) = \psi(f_{|F})$.

c) A l'aide du théorème de Riesz, en déduire qu'il existe une mesure de Radon positive μ sur F telle que pour toute $f \in V$ on ait, $f(x) = \int_F f d\mu$.

2) On suppose que X est le disque unité fermé du plan complexe, V le sous-espace de $\mathcal{C}(X)$ constitué des fonctions harmoniques à l'intérieur du disque unité. (On rappelle que V vérifie les hypothèses du début). Soit $z \in X$ tel que $|z| < 1$ et μ une mesure de Radon positive sur F telle que $f(z) = \int f d\mu$ pour toute $f \in V$.

a) Calculer $\int \zeta^n d\mu(\zeta)$ pour $n \in \mathbb{Z}$. En déduire l'unicité de μ.

b) Soit $r = |z|$ et θ un argument de z. Pour $0 \leq t < 2\pi$ on pose, $P_r(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{int}$.

Montrer que $P_r(t) = \dfrac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2}$ · Montrer que μ est définie par,

$$\int f d\mu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it}) dt$$

14 - Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$.

1) Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.

a) Montrer que F est fermé.

b) Montrer que si V est un sous-espace vectoriel fermé de E, $V + F$ est fermé.

2) Soit V un sous-espace vectoriel de E. On dit qu'un sous-espace vectoriel W de E est un supplémentaire topologique de V si l'application ,

$$\begin{array}{c}(x,y) \mapsto x+y \\ V \times W \to E\end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces normés. (i.e: homéomorphisme linéaire).

a) Montrer que W est un supplémentaire topologique de V si et seulement si la projection sur V parallèlement à W est continue.

b) Montrer que si V admet un supplémentaire topologique il est fermé. (La réciproque est fausse).

3) Soit V un sous-espace vectoriel de E.

a) Montrer que si V est de dimension finie, il admet un supplémentaire topologique. (Montrer qu'il existe un projecteur continu de E sur V à l'aide du théorème de Hahn-Banach).

b) On suppose V fermé de codimension finie. Montrer qu'il admet un supplémentaire topologique.

15 - Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$.

1) Soit $x \in E$.

a) Montrer que pour tout h de E l'application, $t \mapsto \|x+th\|$, est convexe sur $\mathbb{R}$. En déduire l'existence des limites,

$$G_x^-(h) = \lim_{t \to 0-} \left(\frac{\|x+th\| - \|x\|}{t}\right) \quad \text{et} \quad G_x^+(h) = \lim_{t \to 0+} \left(\frac{\|x+th\| - \|x\|}{t}\right)$$

b) Montrer que $G_x^-(h) \leq G_x^+(h)$, $G_x^+(-h) = -G_x^-(h)$.

c) Montrer que l'application, $h \mapsto G_x^+(h)$, est sous-linéaire sur E.

d) On suppose que pour tout $h \in E$, $G_x^+(h) = G_x^-(h)$. Montrer que l'application, $G_x : \; h \mapsto G_x^+(h)$, est une forme linéaire continue sur E. (On dit alors que la norme est **Gâteaux-différentiable** en x et G_x est sa **Gâteaux-différentielle**). Montrer que si $x \neq 0$ on a, $G_x(x) = \|x\|$ et $\|G_x\| = 1$.

2) a) A l'aide du théoréme de Hahn-Banach montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$ il existe une forme linéaire f continue sur E telle que,

$$(*) \qquad f(x) = \|x\| \quad , \quad \|f\| = 1$$

Soit $x \in E \setminus \{0\}$.

b) On suppose que la norme est Gâteaux-différentiable en x (cf **1 (d)**). montrer que G_x est la seule forme linéaire continue sur E vérifiant $(*)$ (cf **(a)**).

c) On suppose qu'il existe $h \in E$ tel que $G_x^-(h) \neq G_x^+(h)$. Soit α un réel tel que, $G_x^-(h) < \alpha < G_x^+(h)$. A l'aide du théorème de Hahn-Banach, montrer qu'il existe une forme linéaire f continue sur E telle que, $f(x) = \|x\|$, $\|f\| = 1$, $f(h) = \alpha$.

d) Donner une propriété de la norme équivalente à la propriété suivante: il existe une unique forme linéaire f continue sur E telle que $f(x) = \|x\|$ et $\|f\| = 1$.