UNIVERSITÉ D'ORLÉANS **2000-2001**
U.F.R. Faculté des Sciences **Unité MA8.01.**
Maîtrise de Mathématiques

FEUILLE D'EXERCICES 1

---

1 - Hyperplan.

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire.
1) Montrer que pour tout $x \in E \setminus \ker f$ alors $E = ker f \oplus \mathbb{K}x$.
2)a) Soit H un sous-espace vectoriel de E tel qu'il existe $a \notin H$ et $E = H \oplus \mathbb{K}a$. Montrer qu'il existe une forme linéaire f telle que $H = \ker f$.
b) Soit g une autre forme linéaire telle que $H \subset \ker g$, montrer alors qu'il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $g = \mu f$.
Le noyau d'une forme linéaire non- nulle est appelé hyperplan.
3) Que peut-on dire d'un sous-espace vectoriel F de E qui contient strictement un hyperplan?
On suppose E muni d'une norme.
4) Montrer que si u est une forme linéaire (non-nulle) alors u est continue si et seulement si $\ker u$ est fermé. [On montrera qu'il existe un $a \in E$ tel que $u(a) = 1$ et un $r > 0$ tel que $B(0, r) \cap (a + \ker u) = \emptyset$. De ceci on montrera que u est bornée].
5) Montrer que une forme linéaire f quelconque alors soit $\ker f$ est fermé, soit $\ker f$ est dense dans E.

---

2 - Bases et supplementaires d'un espace vectoriel.

a) Soit E un espace vectoriel et G une partie de E génératrice de E (tout élément de E est une combinaison linéaire finie d' éléments de G) et L une partie libre de E (toute combinaison linéaire finie qui donne zéro à ses coefficients nuls). On suppose $L \subset G \subset E$. Montrer qu'il existe une base B de E telle que $L \subset B \subset G$. En déduire que tout espace vectoriel admet une base (dénombrable ou non). [On commencera par traiter le cas où G est finie. Pour le cas où G est infini, on utilisera le lemme de Zorn avec la relation d'inclusion et l'ensemble $\mathcal{S}$ des parties libres de E contenant L et contenues dans G].
On dit que B est une base de Hamel.
b) Montrer que tout sous-espace vectoriel F de E possède au moins un sous-espace supplémentaire et que celui-ci n'est pas unique si F n'est pas réduit à $\{0\}$ ou E.
c) Montrer que si E est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel et qu'il admet une base dénombrable $(e_i)_{i \in I}$ (I équipotent à $\mathbb{N}$) alors E est dénombrable.
d) Montrer que toute base de Hamel de $\mathbb{R}$ $(x_j)_{j \in J}$ vu comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel possède plus d'un élément.
e) Montrer qu'en fait cette base n'est pas dénombrable mais est équipotente à $\mathbb{R}$.

f)Soit $j_0 \in J$, et soit φ la $\mathbb{Q}$-forme linéaire sur $\mathbb{R}$ associant à tout $y \in \mathbb{R}$, sa coordonnée sur (x_{j_0}) dans la base $(x_j)_j$. Démontrer que φ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, que $\ker \varphi$ est dense dans $\mathbb{R}$, et que pour tout intervalle ouvert non-vide U de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\varphi(U)$ est dense dans $\mathbb{R}$.

---

3 - Formes lineaires sur les Hilbert.
Soit M un sous espace vectoriel d'un espace de Hilbert H et $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire continue de norme $|| f ||_M$. Montrer qu'il existe un unique prolongement continu de f sur H de norme $|| f || = || f ||_M$.

---

4 - Semi-norme.
Une semi-norme sur un espace vectoriel E est une application $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
(i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pour tout $x, y \in E$.
(ii) $p(\lambda x) = |\lambda| \, p(x)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$.
(Si de plus p vérifie $p(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ alors on dit que p est une norme).
Montrer que
a) $p(0) = 0$.
b)$| p(x) - p(y) | \leq p(x - y)$.
c) $p(x) \geq 0$.
d) $\{x : p(x) = 0\}$ est un sous espace vectoriel de E.
Définitions:
On pose pour $t > 0$, $tA = \{ta, a \in A\}$.
(1) A est un ensemble convexe de E si $A \subset E$ et pour tout $t \in [0, 1], tA + (1 - t)A \subset A$.
(2) On dit que $A \subset E$ est absorbant si pour tout $x \in E$, il existe $t = t(x) > 0$ tel que $x \in tA$.
(3) On dit que $A \subset E$ est équilibré si pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ avec $|\alpha| \leq 1$ alors $\alpha A \subset A$.

---

5 - Fonctionnelle de Minkowski.
Soit A un ensemble convexe de E. On definit la fonctionnelle de Minkowski (jauge) μ_A de A par :

$$\mu_A(x) = \inf\{t > 0 : tx \in A\}, \quad x \in E$$

On suppose que A est convexe et absorbant dans E. Montrer alors que l'on a les propriétés suivantes:
a) $\mu_A(x + y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$ pour tout $x, y \in E$.
b) $\mu_A(tx) = t\mu_A(x)$ pour tout $x \in E$ et $t \geq 0$.
c) μ_A est une semi-norme si A est équilibré.
d) Si $B = \{x : \mu_A(x) < 1\}$ et $C = \{x : \mu_A(x) \leq 1\}$ alors $B \subset A \subset C$ et $\mu_A = \mu_B = \mu_C$.
e) Si p est une semi-norme sur E et si $D = \{x : p(x) < 1\}$ alors D est convexe, absorbant, équilibré et $p = \mu_D$.