UNIVERSITÉ d'ORLÉANS SCL1 MA02
Département de mathématiques 2008-9

Arithmétique : Feuille 3 (Nombres premiers).

Exercice 1. Combien 15! admet-il de diviseurs?

Exercice 2. (1) Décomposer 8160 en produit de facteurs premiers.
(2) Trouver tous les entiers positifs a et b tels que:
$a \geq b$, $\text{pgcd}(a, b) = 5$ et $\text{ppcm}(a, b) = 8160$.

Exercice 3. Montrer que si x et y sont des entiers positifs tels que x^2 divise y^2 alors x divise y. Application: démontrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Exercice 4. Trouver tous les entiers relatifs n tels que $n^2 + n + 7$ soit divisible par 13.(*Après avoir cherché, regarder l'indication à la fin de la feuille*).

Exercice 5. Soit c un nombre premier tel que $n = 11c + 4$ soit le carré d'un entier. Déterminer les nombres c. Pour quels entiers $0 \leq a \leq 10$ peut-on encore appliquer la même méthode lorsque $n = 11c + a$? (*Après avoir cherché, utiliser un argument similair à l'indication à la fin de la feuille pour l'exo. 4*).

Exercice 6. Deux nombres premiers n et m sont dits "jumeaux" si $n + 2 = m$. Par exemple, les couples $(11, 13), (17, 19), (41, 43)$ sont des couples de nombres premiers jumeaux. On considère un entier $n > 3$.

(1) Montrez que si $(n, n + 2)$ est un couple de nombres premiers jumeaux alors n doit être de la forme $n = 3k + 2$.
(2) Montrez que si $(n, n+2)$ est un couple de nombres premiers jumeaux alors $n+4$ ne peut pas être premier.
(3) Montrez que $(n, n + 2)$ est un couple de nombres premiers jumeaux si et seulement si $n^2 + 2n$ a exactement 4 diviseurs dans $\mathbb{N}^*$.

Exercice 7. Soient p et q des nombres premiers tels que $p \neq q$. Quels sont les diviseurs positifs de p^2q?

Exercice 8. Trouver tous les couples d'entiers relatifs (x, y) tels que $x^2 - y^2 = 13$. Même question avec $x^2 - y^2 = 35$.

Exercice 9. On considère le nombre $m = 2^n p$, dans lequel n désigne un entier naturel quelconque et p un nombre premier. Dresser la liste des diviseurs de m, y compris 1 et m lui-même, et calculer en fonction de m et p, la somme S de tous ces diviseurs.

Exercice 10. *Rappel: On a vu que pour b et n des entiers supérieurs ou égaux à 2, le nombre $b^n - 1$ est multiple de $b - 1$.*

(1) Soient a et k deux entiers supérieurs ou égaux à 2. On suppose que $a^k - 1$ est un nombre premier. Montrer que $a = 2$ et que k est un nombre premier.
(2) Soit p un nombre premier tel que $p \leq 7$. Montrer que $2^p - 1$ est un nombre premier.

Exercice 11. Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de 0 que comporte $n!$ à la fin de son écriture en base 10. Par exemple, $5! = 120$ et a donc 1 "0" à la fin de son écriture en base 10.

(1) Montrez que si la décomposition d'un entier a en facteurs premiers est:
$$a = 2^{a_1} \times 5^{a_2} \times 3^{a_3} \times 7^{a_4} \times ...$$
alors a finit par exactement m "0" en base 10 où m est le minimum entre a_1 et a_2. (*On notera le nombre $Z(a)$ le nombre m de zéros pour un entier a*).

Soit n un entier > 0. On pose Q_0 le quotient de la division euclidienne de n par 5.

(2) (a) Montrez que : $n! = 5^{Q_0}.(Q_0!).K_0$ où K_0 est un entier premier avec 5 et divisible par 2^{Q_0}.
(b) En déduire par récurrence que si $n!$ a pour décomposition en facteurs premiers
$$n! = 2^{b_1}5^{b_2}3^{b_3} \times 7^{b_4} \times ...$$
alors $Z(n!) = b_2$. (*On fera la récurrence en supposant P_k VRAI pour tout $k \leq n$ puis on démontrera P_k VRAI pour tous $k \leq n+1$*).
(c) En déduire aussi que le nombre de 0 que comporte $n!$ à la fin de son écriture en base 10 est la somme du nombre de 0 que comporte $(Q_0!)$ à la fin de son écriture en base 10 et de Q_0.

(3) On pose Q_1 le quotient de la division euclidienne de Q_0 par 5. Montrez que $n! = 5^{Q_0+Q_1}.(Q_1!).K_1$ où K_1 est premier avec 5. Expliquez pourquoi le nombre de 0 de n en base 10 est $Q_0 + Q_1$ + nombre de "0" de $(Q_1!)$.

(4) On définit alors la suite (Q_k) par:
Q_0 = quotient de la division euclidienne de n par 5
et pour tout $k \geq 0$,
Q_{k+1} = quotient de la division euclidienne de Q_k par 5.
(a) Montrez qu'il existe un entier N tel que pour tout $k \geq N, Q_k = 0$ et $Q_{N-1} \neq 0$.
(b) Montrez que le nombre de 0 finissant l'écriture de $n!$ en base 10 est :
$Q_0 + Q_1 + Q_2 + ... + Q_{N-1}$.

(5) Application: On pose $n = 100$. Calculez Q_0, Q_1 et Q_2. Vérifiez que 100! finit avec 24 "0" en base 10.

Révisions

Exercice 12. Soit (u_n) une suite d'entiers.

(1) Supposons que m divise u_n. Montrer que m divise u_{n+1} équivaut à m divise $u_{n+1} - u_n$.
(2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = n(n+1)(n+2)(n+3)$ est divisible par 24.
(3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ est divisible par 120.

Indications **exo.4**. Ecrire n sous la forme $n = 13q + r, 0 \leq r < 13$ avec $q, r \in \mathbb{N}$.

$\triangle$