UNIVERSITÉ d'ORLÉANS SCL1 MA02
Département de mathématiques 2008-9

Arithmétique : Feuille 1.

Définition: on dira qu'un entier n est positif si $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 1. Effectuer la division euclidienne de a par b pour les couples (a, b) suivants:

$$(219, 32), \quad (331, 45) \quad (21927, 19333).$$

Exercice 2. Soit n un entier naturel.
Effectuer la division euclidienne de $a = 3n + 5$ par $b = 3n + 2$ (On discutera le résultat suivant la valeur de n).

Exercice 3. Même question avec $a = 6n + 12$ et $b = 2n + 1$.

Exercice 4. Soient a, b des entiers avec b non nul. On dit que a est divisible par b (ou b divise a ou a est un multiple de b) s'il existe un entier q tel que $a = bq$.
Montrer que si un tel q existe, il est unique (Aide: supposer qu'il existe q_1 vérifiant aussi $a = q_1 b$ et démontrer que $q = q_1$).

Exercice 5. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme des entiers compris entre 0 et n est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 6. Effectuer la division euclidienne de $a = -192$ par $b = 36$.

Exercice 7. a) Montrer que tout entier n positif ou nul s'écrit de la forme $n = 3p$ ou $n = 3p + 1$ ou $n = 3p + 2$ pour un entier p positif ou nul .
b) A l'aide de la question a), montrer que $n(n + 1)(n + 2)$ est multiple de 3.

Exercice 8. Soit n un entier positif. Montrer que si d est un diviseur de n alors $-n \leq d \leq n$.

Exercice 9. Soient a, b, c des entiers. Montrer les propriétés suivantes:

(i) Si a divise b et si b divise c alors a divise c. (On se servira de la définition de la divisibilité et on fera un raisonnement).

(ii) Si a divise b et b divise a alors $a = b$ ou $a = -b$.

(iii) Si a divise b et c alors a divise $b + c$.

(iv) Si a divise b alors a divise bc pour tout c entier.

(v) Montrer qu'il existe des entiers a, b, c tels que a divise bc mais que a ne divise ni b ni c. (On dit alors que la réciproque de (iv) n'est pas vraie).

Exercice 10. Effectuer la division euclidienne de $a = -99$ par $b = 27$.

Exercice 11. Effectuer la division euclidienne de $a = 27$ par $b = -99$.

[Arithmétique: suite de la feuille 1]

Exercice 12. Effectuer la division euclidienne de $a = -192$ par $b = 36$.

Exercice 13. (Propriété d'Archimède). Montrer que pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, il existe un entier n tel que

$$a \leq nb.$$

Exercice 14.
(1) Soient b et n des entiers supérieurs ou égaux à 2. Montrer que $b^n - 1$ est multiple de $b - 1$. (On pourra commencer par traiter les cas $n = 2$ et 3).
(2) Montrer que $(b-1)^2$ divise $b^n - 1$ si et seulement si $b - 1$ divise n.

Exercice 15. Soit a un entier relatif quelconque. Démontrer que le nombre $a(a^2 - 1)$ et, plus généralement, $a(a^{2n} - 1)$ est divisible par 6 (Pour n un entier positif).

Exercice 16. Démontrer que le nombre $7^n + 1$ est divisible par 8 lorsque n est impair. Dans le cas n pair, calculer le reste de la division par 8.

Exercice 17. Calculer $d = pgcd(693, 680)$. Trouver $u, v \in \mathbb{Z}$ vérifiant la relation de Bezout $d = 693u + 680v$.

Exercice 18.
(1) Calculer $\mathrm{pgcd}(637, 595)$.
(2) Existe-t-il des entiers x et y tels que $637x + 595y = 91$? Si oui, trouver tous les entiers x et y tels que $637x + 595y = 91$.
(3) Existe-t-il des entiers x et y tels que $637x + 595y = 143$? Si oui, trouver tous les entiers x et y tels que $637x + 595y = 143$.

Exercice 19. Existe-t-il des entiers x et y tels que $456057x + 382109y = 7$?

Exercice 20. Soient a, b et c des entiers positifs (i.e. strictement positifs). On suppose que a et c sont premiers entre eux.
(1) Soit d un diviseur de a. Montrer que d et c sont premiers entre eux.
(2) Soit d un diviseur de a et bc. Montrer que d divise b.
(3) Montrer que l'on a $\mathrm{pgcd}(a, bc) = \mathrm{pgcd}(a, b)$.