Feuille d'exercices corrigés en mathématiques pour l'économiste 5

L3 économie
1er semestre 2025-2026

1 Généralités et dimension 1

Résolutions explicites

Exercice 1. Soit $\lambda, p \in \mathbb{R}$. Calculer les fonctions (positives) $y(x)$ dont l'élasticité par rapport à x est $E(x) = \lambda x^p$

Correction. Soit $y(x)$ une telle solution. Par définition, $E(x) = \dfrac{xy'(x)}{y(x)}$. Le problème consiste donc à déterminer y telle que :

$$\frac{xy'(x)}{y(x)} = \lambda x^p \Leftrightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = \lambda x^{p-1}$$

En primitivant entre deux points x_0 et x donnés, on obtient

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(s)}{y(s)} ds = \lambda \int_{x_0}^{x} s^{p-1} ds.$$

Le terme de gauche vaut

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(s)}{y(s)} ds = \ln\left(y(x)\right) - \ln\left(y(x_0)\right) = \ln\left(\frac{y(x)}{y(x_0)}\right).$$

Le terme de droite dépend de la valeur de p :

$$\ln\left(\frac{y(x)}{y(x_0)}\right) = \lambda \int_{x_0}^{x} s^{p-1} ds = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{p}\left(x^p - x_0^p\right) & \text{si } p \neq 0 \\ \lambda \ln\left(\dfrac{x}{x_0}\right) & \text{si } p = 0 \end{cases}.$$

Finalement, en notant $y(x_0) = y_0$:

$$\begin{cases} y(x) = y_0 \exp\left(\frac{\lambda}{p}\left(x^p - x_0^p\right)\right) & \text{si } p \neq 0 \\ y(x) = y_0 \left(\dfrac{x}{x_0}\right)^{\lambda} & \text{si } p = 0 \end{cases}$$

Exercice 2. On s'intéresse à un produit vendu à un prix $P(t)$ dépendant du temps t. On suppose que la demande $Q_d(t)$ et l'offre $Q_0(t)$ à l'instant t dépendent du prix et de la variation du prix à l'instant t via les équations :

$$Q_d(t) = a - bP(t) - cP'(t)$$

$$Q_0(t) = \alpha + \beta P(t) + \gamma P'(t)$$

où a, b, c, α, β, γ sont des constantes strictement positives.
1) En supposant que le marché est à l'équilibre à tout instant, calculer le prix $P(t)$ en fonction du temps t.
2) Calculer l'état stationnaire moyen du prix.

Correction.
1) On a $Q_d(t) = Q_0(t)$ pour tout t soit

$$a - bP(t) - cP'(t) = \alpha + \beta P(t) + \gamma P'(t),\ \forall t.$$

On obtient donc l'équation différentielle

$$(\gamma + c)P'(t) + (\beta + b)P(t) + \alpha - a = 0.$$

C'est une équation linéaire avec second membre constant que l'on peut réécrire

$$P'(t) = -\frac{\beta + b}{\gamma + c}P(t) + \frac{a - \alpha}{\gamma + c}.$$

La solution homogène générale est $P_h(t) = \lambda e^{-\frac{\beta+b}{\gamma+c}t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Une solution particulière est la fonction constante $P_p(t) = \dfrac{a - \alpha}{\beta + b}$ d'où la solution générale :

$$P(t) = P_h(t) + P_p(t) = \lambda e^{-\frac{\beta+b}{\gamma+c}t} + \frac{a - \alpha}{\beta + b}.$$

On pourrait calculer λ à l'aide d'une condition initiale. Ce n'est pas nécessaire ici.
2) Comme $-\frac{\beta+b}{\gamma+c} < 0$ on a pour tout valeur de λ : $P(t) \to \dfrac{a - \alpha}{\beta + b}$ lorsque $t \to +\infty$.

Exercice 3. Résoudre $y' = y^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Discuter de l'existence en temps long et de l'unicité en fonction de α.

Correction. Si $\alpha < 0$ alors la fonction $x \mapsto x^\alpha$ n'est pas définie pour tout y. Si $\alpha < 1$ alors la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie continue mais pas C^1 en 0. Dans ces cas, le théorème de cauchy Lipschitz ne s'applique donc pas tel quel. (il n'y a pas unicité de la solution et cela sort du cadre de ce cours).

Si $\alpha \geq 1$, $x \mapsto x^\alpha$ est une fonction C^1 donc par le théorème de C-L. local, cette equation a une unique solution pour une condition initiale $y(t_0) = y_0$ donnée.

Si $y_0 = 0$ alors on voit directement que cette unique solution est $y(t) = 0$ pour tout t.

Sinon on sait que y est non nulle dans le voisnage de t_0 et on a donc au voisinage de t_0 $y'/y^\alpha = 1$ que l'on peut maintenant intégrer explicitement entre t_0 et t. On peut disctinguer 2 cas.

Si $\alpha = 1$ alors il vient

$$\ln\left(\frac{y(t)}{y_0}\right) = t - t_0$$

soit

$$y(t) = y_0 e^{t - t_0}.$$

Dans ce cas la solution existe pour tout t.

— si $\alpha > 1$ alors on trouve

$$\frac{1}{1 - \alpha}\left(y(t)^{1-\alpha} - y_0^{1-\alpha}\right) = t - t_0$$

soit après réorganisation des termes :

$$y(t) = \left(\frac{1}{y_0^{1-\alpha} - (\alpha - 1)(t - t_0)}\right).$$

Exercice 4. On s'intéresse au comportement asymptotique des solutions de $y'(t) + 2y(t) = f(t)$ pour plusieurs fonctions f et une condition initiale $y(0) = y_0 > 0$.
1) Résoudre l'équation homogène $y' + 2y = 0$ et calculer la limite de $y(t)$ pour $t \to +\infty$.
2) Résoudre l'équation et calculer la limite pour $f(t) = a \in \mathbb{R}$
3) Résoudre l'équation et calculer la limite pour $f(t) = at + b$
4) Résoudre l'équation et calculer la limite pour $f(t) = ae^{at}$ (on pourra distinguer les cas $a = -2$ et $a \neq -2$).

Correction. 1) La solution de l'équation homogène est

$$y_h(t) = \lambda e^{-2t},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pour tout λ on a $y_h(t) \to +\infty$.
2) Si le second membre est constant, alors on peut chercher une solution particulière sous la forme d'une constante :

$y_p(t) = \alpha \in \mathbb{R}$. Il vient alors $y_p'(t) = 0$ et en injectant dans l'équation on obtient $0 + 2\alpha = a$ soit $\alpha = \dfrac{a}{2}$. La solution particulière est donc $y_p(t) = \dfrac{a}{2}$.
D'après le principe de superpositon, la solution générale est $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ soit ici :

$$y(t) = \lambda e^{-2t} + \frac{a}{2}.$$

On détermine λ à l'aide de la condition initiale en prenant $t = 0$:

$$y(0) = y_0 = \lambda + \frac{a}{2}$$

d'où l'on déduit $\lambda = y_0 - \dfrac{a}{2}$ et finalement l'unique solution (définie pour tout $t \in \mathbb{R}$)

$$y(t) = \left(y_0 - \frac{a}{2}\right) e^{-2t} + \frac{a}{2}.$$

On a

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \frac{a}{2}.$$

3) Supposons que $a \neq 0$ sinon on est dans le cas de la question précédente. Vu le second membre, on ne trouvera pas une solution constante (essayez de le faire). On cherche alors une solution particulière sous la forme $y_p(t) = \alpha t + \beta$. On a alors $y_p'(t) = \alpha$ et en injectant dans l'équation différentielle, on a pour tout t :

$$\alpha + 2(\alpha t + \beta) = at + b \iff 2\alpha t + \alpha + 2\beta = at + b.$$

Par identification des coefficients, il vient

$$\begin{cases} 2\alpha = a \\ \alpha + 2\beta = b \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{a}{2} \\ \beta = \dfrac{2b - a}{4}. \end{cases}$$

D'où la solution particulière

$$y_p(t) = \frac{a}{2} t + \frac{2b - a}{4}.$$

On en déduit la solution générale de l'équation différentielle par superposition :

$$y(t) = \lambda e^{-2t} + = \frac{a}{2} t + \frac{2b - a}{4}.$$

Pour $t = 0$ il vient alors

$$y_0 = \lambda + \frac{2b - a}{4} \leftrightarrow \lambda = y_0 - \frac{2b - a}{4}.$$

d'où l'unique solution du problème de Cauchy :

$$y(t) = \left(y_0 - \frac{2b - a}{4}\right) e^{-2t} + \frac{a}{2} t + \frac{2b - a}{4}$$

qui tend vers $+\infty$ si $a > 0$ et vers $-\infty$ si $a < 0$.
4) Ca devient plus difficile d'avoir une idée *apriori* de la forme de la solution particulière. Nous allons donc utiliser la méthode de la variation de la constante. On cherche donc la solution particulière sous la forme

$$y_p(t) = \lambda(t) e^{-2t}$$

où $t \mapsto \lambda(t)$ est une fonction à déterminer. Un calcul direct donne

$$y_p'(t) = \lambda'(t) e^{-2t} - 2\lambda(t) e^{-2t}.$$

en injectant dans l'équation différentielle il vient :

$$\lambda'(t) e^{-2t} - 2\lambda(t) e^{-2t} + 2\lambda(t) e^{-2t} = a e^{at}.$$

soit après simplifications :

$$\lambda'(t) = a e^{(a+2)t}.$$

Il suffit d'intégré pour déterminer $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) - \lambda(0) = \int_0^t a e^{(a+2)s} ds.$$

On doit distinguer 2 cas.

Cas 1 : si $a = -2$ alors $e^{(a+2)s} = e^0 = 1$ d'où

$$\lambda(t) = \lambda(0) - 2t$$

Toute valeur de $\lambda(0)$ donne une solution particulière. On prend par exemple $\lambda(0) = 0$ et on obtient alors la solution particulière

$$y_p(t) = -2te^{-2t}.$$

Dans ce cas la solution générale est

$$y(t) = (\lambda - 2t)e^{-2t}.$$

En prenant $t = 0$ on trouve $\lambda = y_o$ d'où l'unique solution

$$y(t) = (y_0 - 2t)e^{-2t}$$

qui tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$.

Cas 2 : si $a \neq -2$ alors $\int_0^t ae^{(a+2)s}ds = \dfrac{a}{a+2}\left(e^{(a+2)t-1}\right)$ d'où

$$\lambda(t) = \lambda(0) + \frac{a}{a+2}\left(e^{(a+2)t-1}\right).$$

En prenant par exemple $\lambda_0 = 0$, on obtient une solution particulière

$$y_p(t) = \frac{a}{a+2}\left(e^{(a+2)t} - 1\right)e^{-2t} == \frac{a}{a+2}\left(e^{at} - e^{-2t}\right).$$

On en déduit finalement la solution générale

$$y(t) = \lambda e^{-2t} + \frac{a}{a+2}\left(e^{at} - e^{-2t}\right)$$

En prenant $t = 0$ il vient $y_0 = \lambda$ d'où finalement l'unique solution du problème de Cauchy :

$$y(t) = y_0e^{-2t} + \frac{a}{a+2}\left(e^{at} - e^{-2t}\right)$$

Cette quantité tend vers 0 si $a \leq 0$ et vers $+\infty$ si $a > 0$.

Problème de cauchy et théorème de Cauchy Lipchitz

Exercice 5. Exprimer tous les exemples du cours comme des systèmes différentielles d'ordre 1.

Exercice 6. Résoudre le problème de cauchy

$$\begin{cases} y' = ay \\ u' = bu + cy \end{cases}$$

avec les conditions initiales $(y(0), u(0) = (y_0, u_0)$.

Correction. On a $y = y_0e^{at}$. On trouve donc

$$u' = bu + cy_0e^{at}.$$

L'équation homogène a pour solution $u_h(t) = \lambda e^{bt}$. On va chercher une solution par la méthode de la variation de la constante (voir question 4 de l'exercice 4). Posons donc $u_p(t) = v(t)e^{bt}$ On a $u_p'(t) = v'(t)e^{bt} + bu_p(t)$ et donc en injectant dans l'équation de u :

$$v'(t)e^{bt} = cy_0e^{at} \Leftrightarrow v'(t) = cy_0e^{(a-b)t}.$$

Comme on ne cherche qu'une solution particulière on peut prendre par exemple $v(0) = 0$ et il vient

$$v(t) = cy_0\int_0^t e^{(a-b)s}ds.$$

Il y a deux cas.

— **Si** $a = b$ alors on trouve $v(t) = cy_0t$ et par suite

$$u_p(t) = cy_0te^{at}$$

— **Si** $a \neq b$ alors on trouve $v(t) = \dfrac{cy_0}{a-b}\left(e^{(a-b)t} - 1\right)$ et par suite

$$u_p(t) = \frac{cy_0}{a-b}\left(e^{at} - e^{bt}\right).$$

La solution générale est $u(t) = u_h(t) + u_p(t)$ et on trouve l'unique solution en prenant $t = 0$. Il vient alors

— **Si** $a = b$

$$u(t) = (u_0 + cy_0 t)e^{at}$$

— **Si** $a \neq b$ alors on trouve $v(t) = \dfrac{cy_0}{a-b}\left(e^{(a-b)t} - 1\right)$ et par suite

$$u(t) = u_0 e^{bt} + \frac{cy_0}{a-b}\left(e^{at} - e^{bt}\right).$$

Champs de vecteurs.

Exercice 7. Tracer le champ de vecteurs dans le plan de phase (y, t) pour les systèmes suivant.

$$y' = ty, \quad y' = y^2 + t^2, \quad y' = y(t - y)$$

$$y' = -t, \quad y' = 3t^2 + 1, \quad y' = y(1 - y), \quad y' = y(1 - y^2).$$

Correction. Hors programme en 2026

Étude qualitative en dimension 1

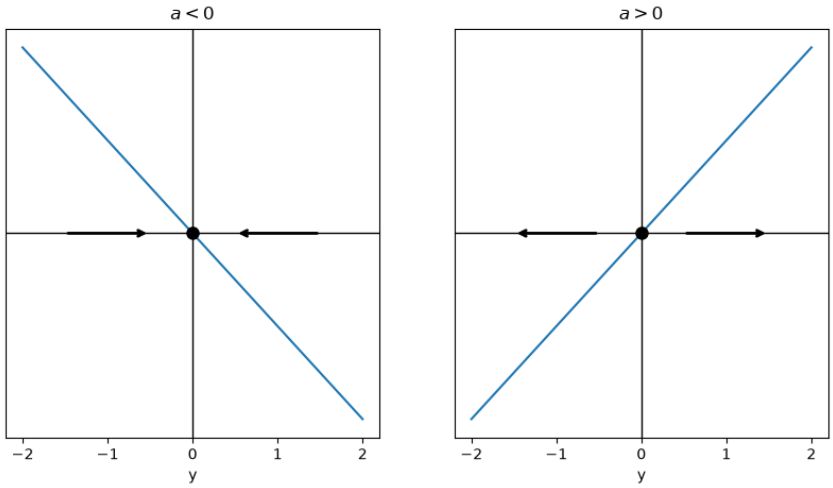
Exercice 8. Étudier le comportement qualitatif des systèmes dynamiques $y' = f(y)$ pour les fonctions f suivantes.

1. $f(y) = ay, \quad a \in \mathbb{R}$
2. $f(y) = ay + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$
3. $f(y) = ay^2 + by + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$

Correction. Dans la suite on note $sgn(x)$ le signe d'un nombre réel x :

$$sgn(x) = \begin{cases} +1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}.$$

1. La solution est explicite et définie sur $\mathbb{R}$. $y(t) = y_0 e^{at}$. En particulier, elle tend vers 0 si $a < 0$ et elle tend vers $sgn(y_0)\infty$ des que $y_0 \neq 0$ si $a > 0$. On peut representer cela sur un graphique

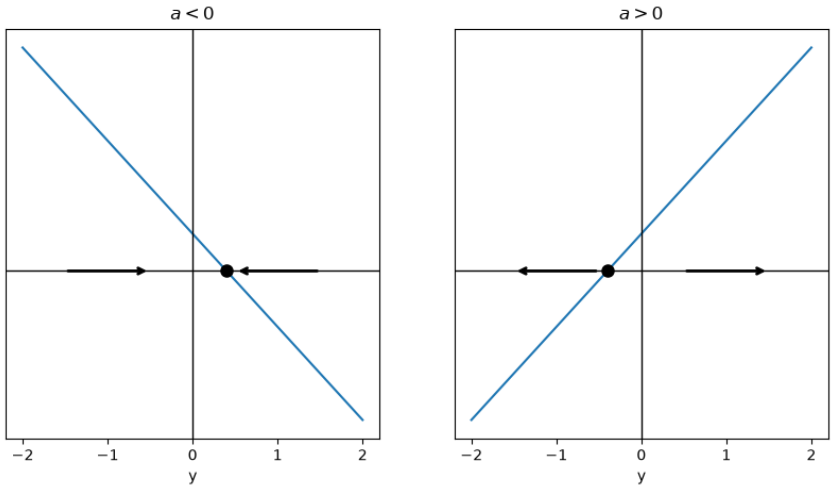


2. Ici encore la solution est explicite (equation linéaire avec second membre constant). On a encore pour tout $t \in \mathbb{R}$:

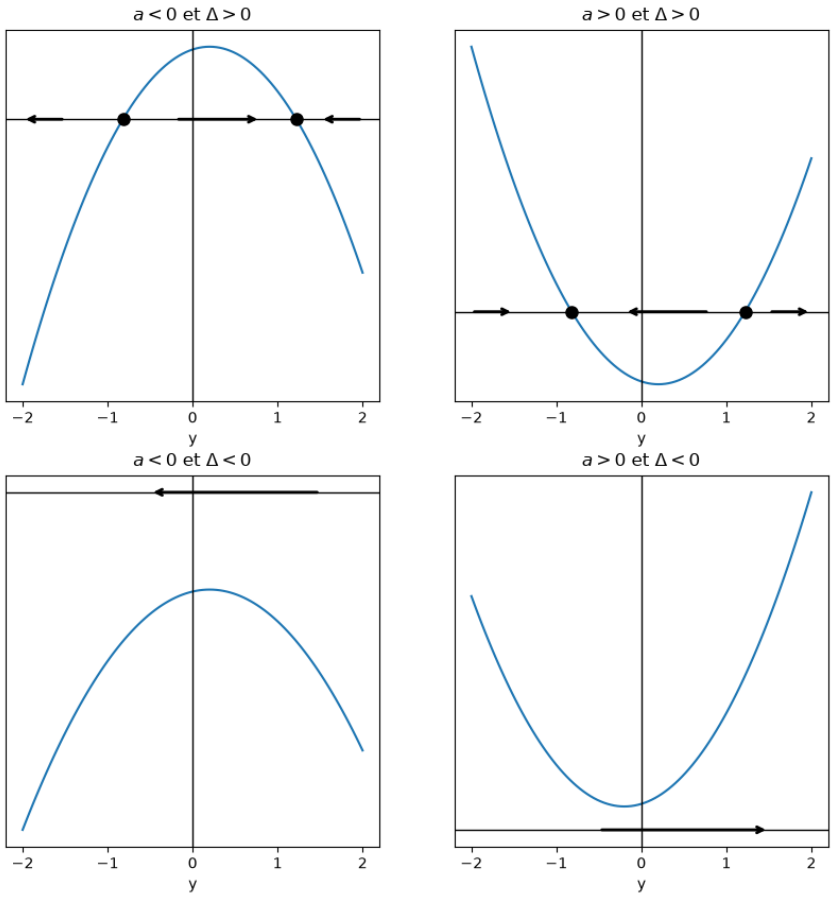
$$y(t) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) e^{at} - \frac{b}{a}$$

Lorsque $t \to +\infty$, si $a < 0$ alors la solution converge vers la solution stationnaire $-\frac{b}{a}$.

Si $a > 0$ alors la solution diverge vers $sgn\left(y_0 + \frac{b}{a}\right)\infty$ des que $y_0 \neq -\frac{b}{a}$. On peut representer cela sur un dessins.



3. Ici la situation est plus complexe. La situation dépend essentiellement du signe de $\Delta = b^2 - 4ac$. Representons directement les 4 cas génériques sur un dessin. Le détail de la correction est laissé à l'étudiant.



Exercice 9. Soit f une fonction régulière.

1. Justifier que la solution maximale $u : I \to \mathbb{R}$ au problème de Cauchy $u' = uf(u)$, $u(0) = u_0 > 0$ vérifie $u(t) > 0 \; \forall t \in I$.
2. Proposer des hypothèses sur f permettant d'assurer que $I = \mathbb{R}$.

Correction. 1. $u(t) = 0$ pour tout t est une solution évidente de l'équation différentielle. Par unicité dans le théorème de Cauchy, on en conclu que si $u(0) > 0$ alors $u(t) > 0$ pour tout $t \in I$.
2. Si $f(x) = 0$ pour un $x > u_0$ alors par unicité dans le théorème de Cauchy, on aura $u(t) \in [0, x]$ et par suite $I = \mathbb{R}$.

Mais ce raisonnement n'est pas valable pour tout $u_0 > 0$.

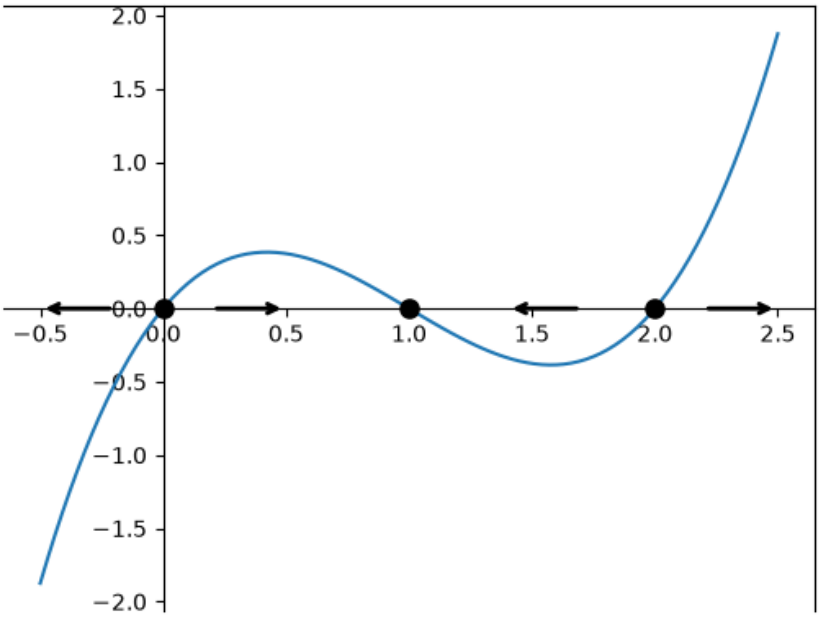
Un autre point de vue est de supposer que $F(u) = uf(u)$ est globalement Lipschitsienne sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque hors programme : En fait il suffit que $|F(u)| \leq a + b|u|$, on parle de croissance sous linéaire. Ainsi f bornée suffit. Mais ceci n'assure pas que $F(u) = uf(u)$ est globalement Lipschitsienne. Cela assure en revanche que l'unique solution n'explose pas en temps fini.

Exercice 10. Soit $a < b < c$ trois réels.

1. Etudier l'équation $u' = (u - a)(u - b)(u - c)$.
2. Dans le cas $a = 0$ comparer le résultat avec l'équation $v' = v(c - v)$.

Correction. La dynamique de la question 1 est lu sur le graphique. La comparaisons dans le cas de la question 2 est qu'apres le comportement similaire pour $u < b$, une autre solution stationaaire c apparait et la solution tend vers l'infini si $u_0 > c$.



Exercice 11. [Quota de pêche.]
Pour tout temps $t \in \mathbb{R}_+$, on note $u(t)$ la concentration de morue (en centaine par m^3) que l'on trouve dans une zone de pêche. On suppose que $u(0) > 0$.

Une étude[1] a montré que l'évolution naturelle, c'est-à-dire sans activité humaine, de la population de poisson vérifie l'équation différentielle

$$u' = 2u(1 - 0.5u).$$

1. Étudier cette équation.
   On justifiera notamment que $u(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et on étudiera la limite lorsque $t \to +\infty$.
2. Pour prendre en compte la pression de pêche, un nouveau modèle a été proposé.

   $$u' = 2u(1 - 0.5u) - 3/4.$$

   Justifier et étudier ce modèle. (On expliquera notamment pourquoi on ne peut pas l'appliquer naïvement.)
3. Quelle quantitée maximum de pêche peut on imposer sans exterminer la population.
4. Quelle autre modèle (et donc stratégie de gestion) proposez vous ?

Correction. voir CM

Exercice 12. [Modèle néoclassique de la croissance (Robert Solow, 1950s).] Soit t le temps. On n'écrira pas explicitement la variable t dans les fonctions de cet exercice. On note K le capital (qui dépend du temps t), L le travail (qui dépend du temps t) et k le ratio capital-travail : $k(t) = K(t)/L(t)$. On note également y la production par personne et on suppose que

$$y = f(k)$$

où f est une fonction croissante et concave (et C^1 dans le cadre de cet exercice).
On suppose enfin que le travail augmente exponentiellement vite à un taux d'accroissement noté n et que l'augmentation marginale du capital en stock K est proportionnelle à la production $Y = yL$:

$$K' = sY.$$

1. Étude fictive. La réalité est bien plus complexe.

1. Montrer que l'on obtient l'équation de Solow :

$$k' = sf(k) - nk.$$

2. Étudier le comportement asymptotique de cette équation pour différentes fonctions f.

Correction. 1. D'après les régles de dérivation d'un rapport de fonction, on a

$$k' = K'/L - \frac{L'}{L}\frac{K}{L}.$$

Hors d'apres l'énoncé,

$$K'/L = sY/(Y/y) = sy = sf(k)$$

et

$$\frac{L'}{L}\frac{K}{L} = n\frac{K}{L} = nk$$

d'où le résultat

$$k' = sf(k) - nk.$$

2. Prendre par exemple $f(k) = k(1-k)$, on trouve alors

$$k' = sk - sk^2 - nk = k(s - n - sk)$$

Si $n > k$ c'est la fonction logistique bien connu et $k \to \frac{s-n}{s}$. Si $n < k$ aors $k \to 0$. Si le travail augmente plus vite (taux s) que le capital (taux n) alors le système s'équilbre. Sinon le système s'effondre. D'autres fonctions f sont possibles conduisant possiblement à d'autres interpretations.

2 Systémes linéaires en dimension 2.

Exercice 13. Pour les systèmes suivants, préciser la nature de l'origine et dessiner l'allure du plan de phase ainsi que l'allure des trajectoires.

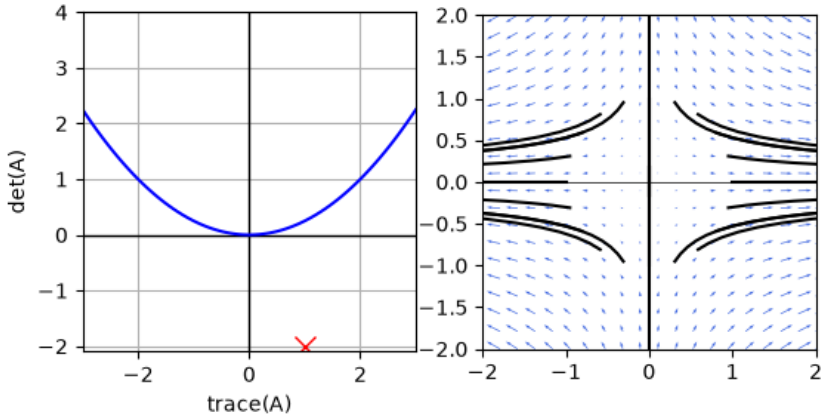
$$(a)\ \begin{cases} x' = 2x \\ y' = -y \end{cases}, \quad (b)\ \begin{cases} x' = -3x + 2y \\ y' = -y \end{cases}, \quad (c)\ \begin{cases} x' = 3x \\ y' = y + x \end{cases}, \quad (d)\ \begin{cases} x' = -x + y \\ y' = x - 2y \end{cases}$$

Correction. On associe à chaque système sa matrice A. On représente l'allure des trajectoires ainsi que la position dans le diagramme de poincaré.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

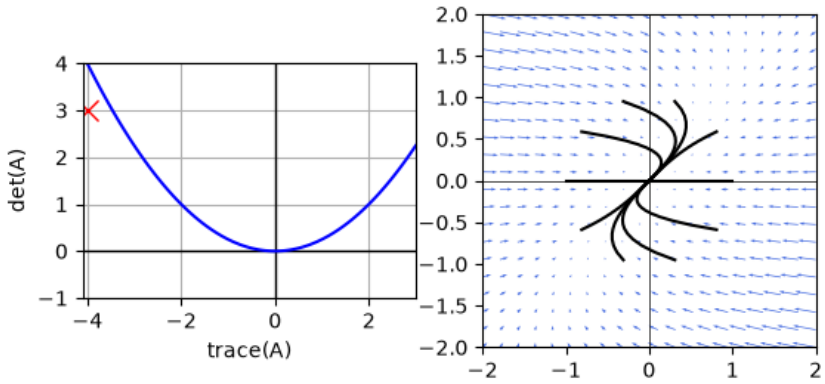
Les valeurs propres sont 2 et -1. Elles sont réelles et de signes opposés. L'origine est donc un point selle.



(b)

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

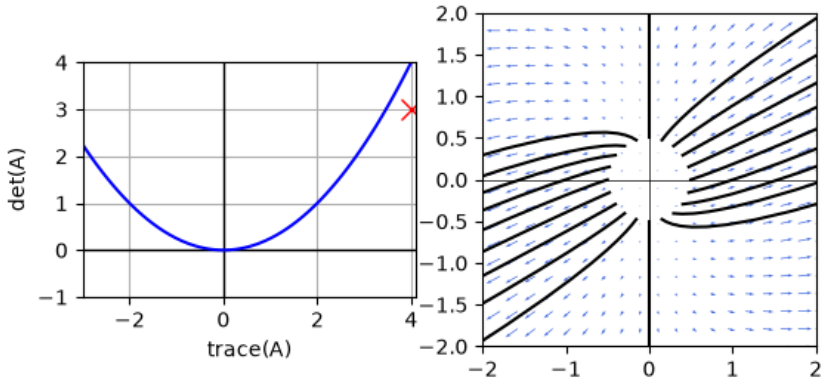
Les valeurs propres sont -3 et -1. Elles sont réelles et strictement négatives. L'origine est donc un nœud stable.



(c)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont 3 et 1. Elles sont réelles et strictement positives. L'origine est donc un nœud instable.



(d)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

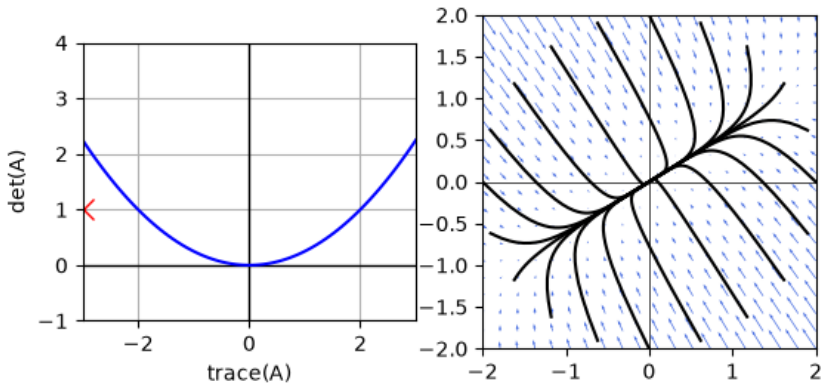
Le polynôme caractéristique est

$$P_A(X) = X^2 + 3X + 1.$$

Son discriminant vaut

$$\Delta = 9 - 4 = 5 > 0.$$

Les deux valeurs propres sont réelles et strictement négatives. L'origine est donc un nœud stable.



Exercice 14. Pour les systèmes suivants, préciser la nature de l'origine et dessiner l'allure du plan de phase ainsi que l'allure des trajectoires.

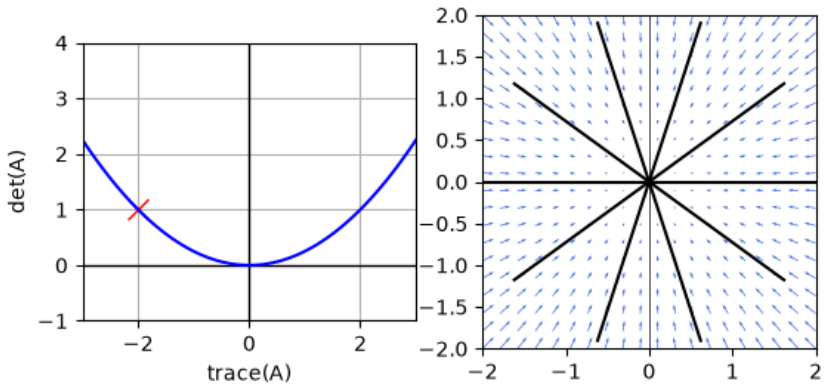
$$(a)\ \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}, \quad (b)\ \begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -y \end{cases}, \quad (c)\ \begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 2y \end{cases}, \quad (d)\ \begin{cases} x' = x \\ y' = -x + y \end{cases}$$

Correction. On calcule les valeurs propres de la matrice associée à chaque système.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

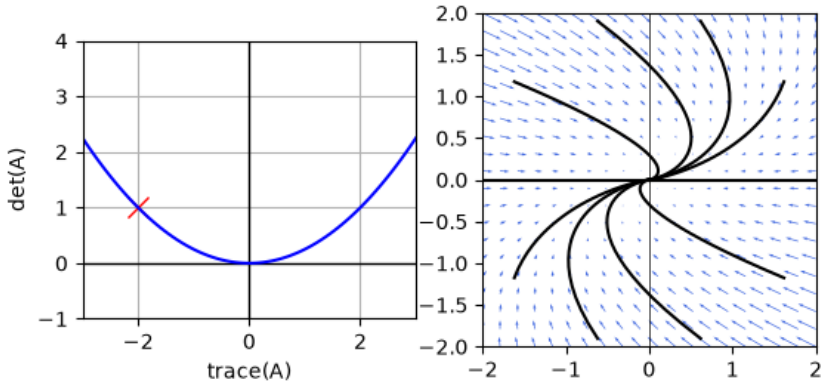
Les valeurs propres sont $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. L'origine est un **nœud stable** (et même une étoile stable : toutes les trajectoires sont des demi-droites dirigées vers l'origine : $(x(t), y(t)) = (x_0 e^{-t}, y_0 e^{-t})$. Le plan de phase est constitué de rayons convergeant vers l'origine.)



(b)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

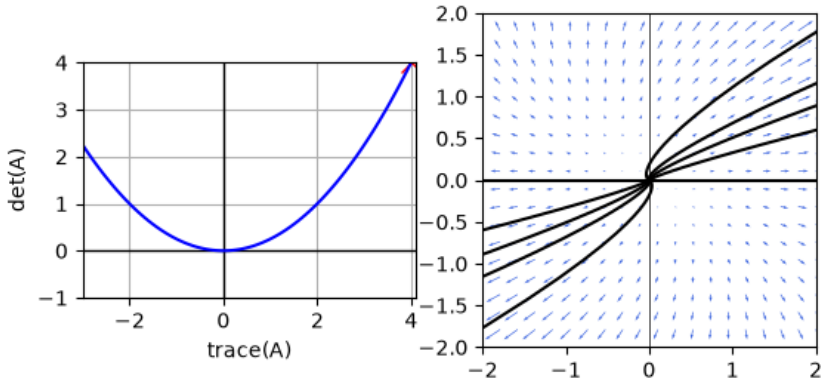
La seule valeur propre est $\lambda = -1$ de multiplicité 2. L'espace propre est de dimension 1 (vecteur propre $(1, 0)$). L'origine est un **nœud stable impropre**. L'axe Ox est une direction propre. Toutes les autres trajectoires convergent vers l'origine en devenant tangentes à l'axe Ox.



(c)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

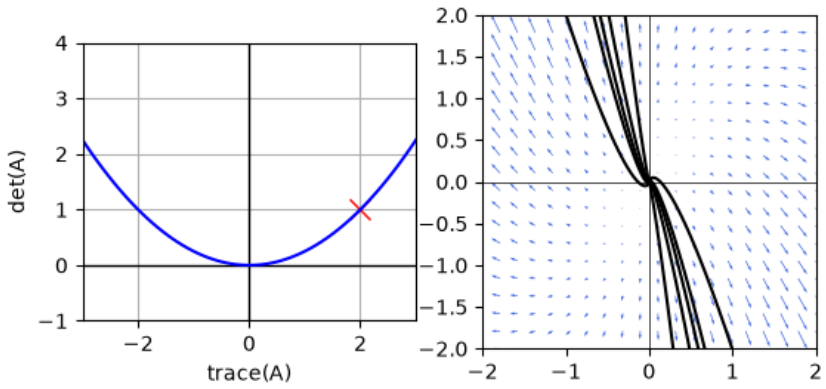
La seule valeur propre est $\lambda = 2$ de multiplicité 2. L'espace propre est de dimension 1 (vecteur propre $(1, 0)$). L'origine est un **nœud instable impropre**. L'axe Ox est la direction propre. Toutes les trajectoires s'éloignent de l'origine en devenant tangentes à l'axe Ox.



(d)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La seule valeur propre est $\lambda = 1$ de multiplicité 2. L'espace propre est de dimension 1 (vecteur propre $(0, 1)$). L'origine est un **nœud instable impropre**. L'axe Oy est la direction propre. Toutes les trajectoires s'éloignent de l'origine en devenant tangentes à l'axe Oy.



Exercice 15. Pour les systèmes suivants, préciser la nature de l'origine et dessiner l'allure du plan de phase ainsi que l'allure des trajectoires.

$$(a)\ \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \quad , \quad (b)\ \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} \quad , \quad (c)\ \begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y \end{cases} \quad , \quad (d)\ \begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -x - y \end{cases}$$

Correction. (Les direction propres sont données à titre indicatif mais ne sont pas exigibles)

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 1,$$

d'où les valeurs propres

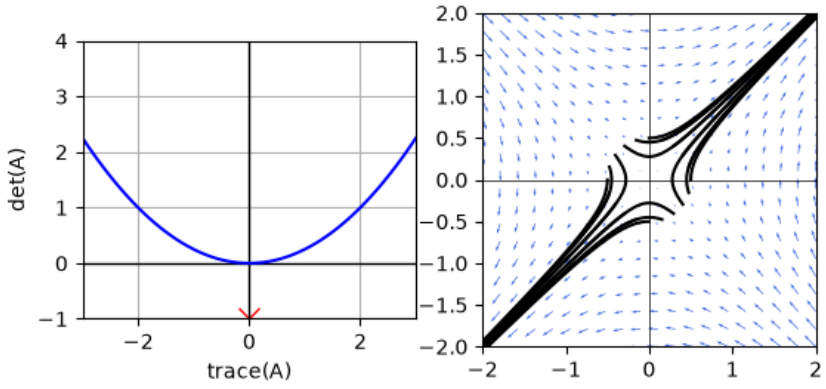
$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = -1.$$

Comme les valeurs propres sont réelles de signes opposés, l'origine est un **point selle** (On peut aussi remarquer directement que $\det(A) < 0$). Les directions propres sont :

$$y = x \qquad (\lambda = 1),$$

$$y = -x \qquad (\lambda = -1).$$

Les trajectoires sont des hyperboles ayant ces deux droites comme asymptotes. La droite $y = -x$ est la variété stable et la droite $y = x$ la variété instable.



(b)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est

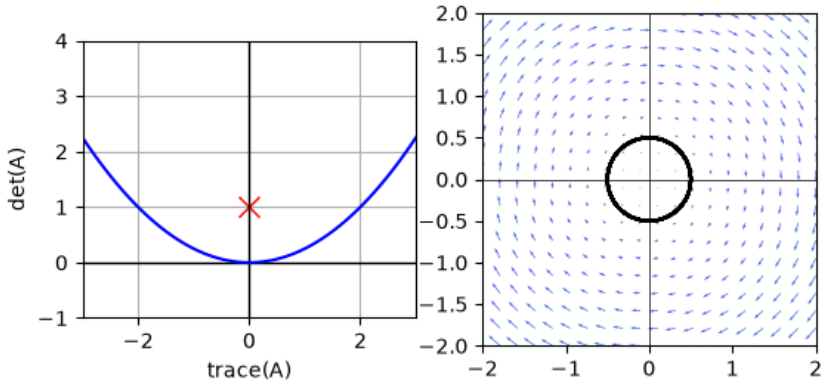
$$P_A(\lambda) = \lambda^2 + 1,$$

d'où

$$\lambda = \pm i.$$

(On peut aussi calculer $\det(A)$, $\mathrm{tr}(A)$ et Δ.) L'origine est un **centre**.

Le sens de rotation est horaire comme le montre un calcul direct du champs de vecteur (voir chap3).



On peut remarquer que

$$\frac{d}{dt}(x^2+y^2) = 2xx' + 2yy' = 2xy - 2xy = 0.$$

Les trajectoires sont donc les cercles d'équation

$$x^2 + y^2 = C.$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres satisfont

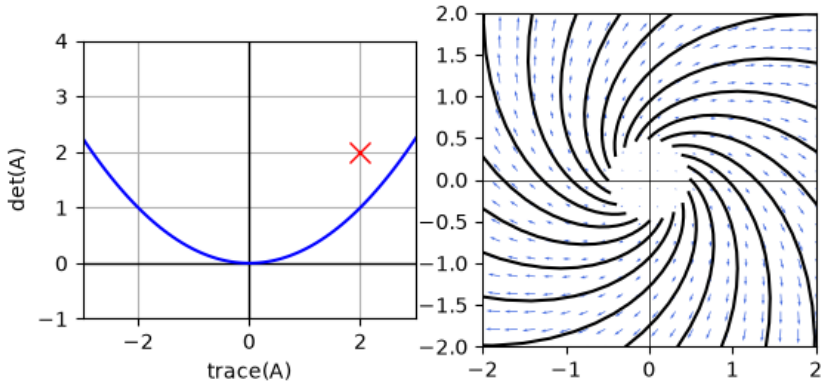
$$(1-\lambda)^2 + 1 = 0,$$

d'où

$$\lambda = 1 \pm i.$$

La partie réelle étant positive, l'origine est une **spirale instable**. Les trajectoires sont des spirales qui s'éloignent de l'origine. (On peut aussi calculer $\det(A)$, $\mathrm{tr}(A)$ et Δ.)

Le sens de rotation est horaire comme le montre un calcul direct du champs de vecteur (voir chap3).



(d)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est

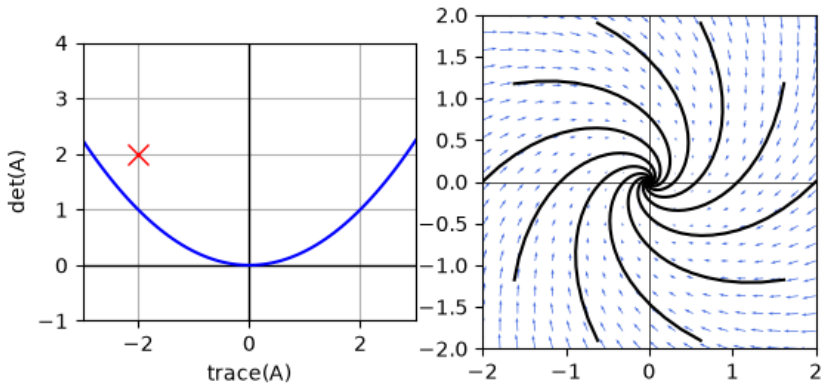
$$(-1-\lambda)^2 + 1 = 0,$$

d'où

$$\lambda = -1 \pm i.$$

La partie réelle étant négative, l'origine est une **spirale stable**. Les trajectoires sont des spirales convergeant vers l'origine. (On peut aussi calculer $\det(A)$, $\mathrm{tr}(A)$ et Δ.)

Le sens de rotation est horaire comme le montre un calcul direct du champs de vecteur (voir chap3).



Exercice 16. Pour les systèmes suivants, préciser la nature de l'origine et dessiner l'allure du plan de phase ainsi que l'allure des trajectoires.

$$(a)\ x'' + 5x' + x = 0, \qquad (b)\ x'' + x' + 4x = 0, \qquad (c)\ x'' = -x$$

On pourra poser $y = x'$ et exprimer les équations sous la forme d'un système différentiel linéaire.

Correction. On pose dans chaque cas

$$y = x',$$

ce qui permet de réécrire l'équation sous la forme d'un système linéaire.

(a)

$$x'' + 5x' + x = 0$$

s'écrit

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x - 5y. \end{cases}$$

La matrice associée est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 1.$$

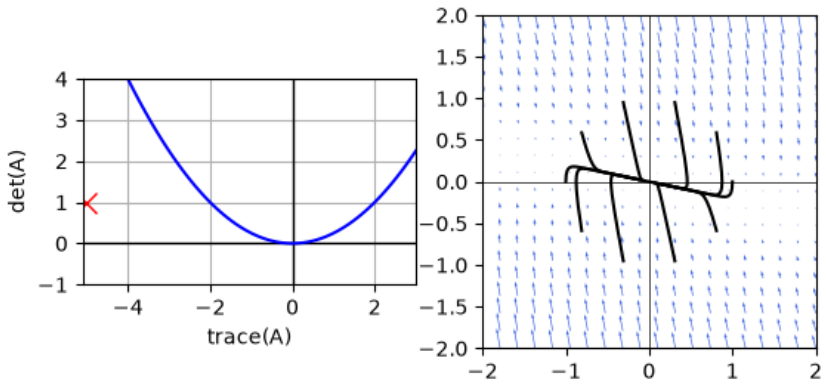
Les valeurs propres vérifient

$$\lambda^2 + 5\lambda + 1 = 0,$$

d'où

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

Les deux valeurs propres sont réelles et strictement négatives. L'origine est donc un **nœud stable**. (Les directions propres sont données à titre indicatif mais ne sont pas exigibles.) Les trajectoires convergent vers l'origine en suivant asymptotiquement la direction propre associée à la plus grande valeur propre.



(b)

$$x'' + x' + 4x = 0$$

s'écrit

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -4x - y. \end{cases}$$

La matrice associée est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 4.$$

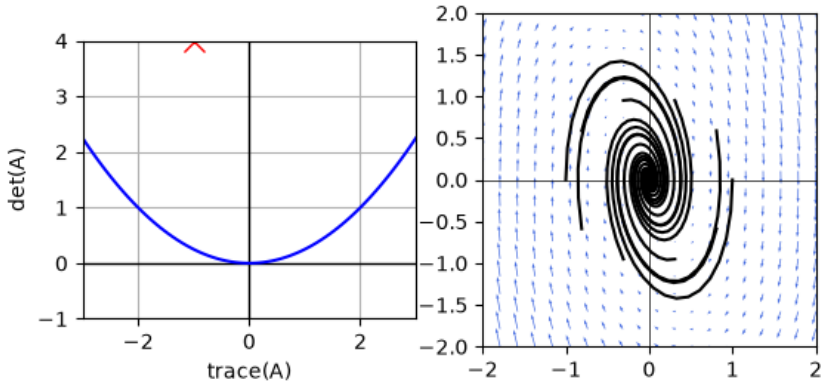
Les valeurs propres vérifient

$$\lambda^2 + \lambda + 4 = 0.$$

On obtient

$$\lambda = \frac{-1 \pm i\sqrt{15}}{2}.$$

La partie réelle étant négative, l'origine est une **spirale stable**. Les trajectoires tournent autour de l'origine tout en convergeant vers celle-ci. (On peut aussi calculer $\det(A)$, $\mathrm{tr}(A)$ et Δ.)



(c)

$$x'' = -x$$

s'écrit

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x. \end{cases}$$

La matrice associée est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 + 1.$$

Les valeurs propres vérifient

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

d'où

$$\lambda = \pm i.$$

L'origine est un **centre**. Le sens de rotation est horaire comme le montre un calcul direct du champ de vecteur (voir chap. 3).

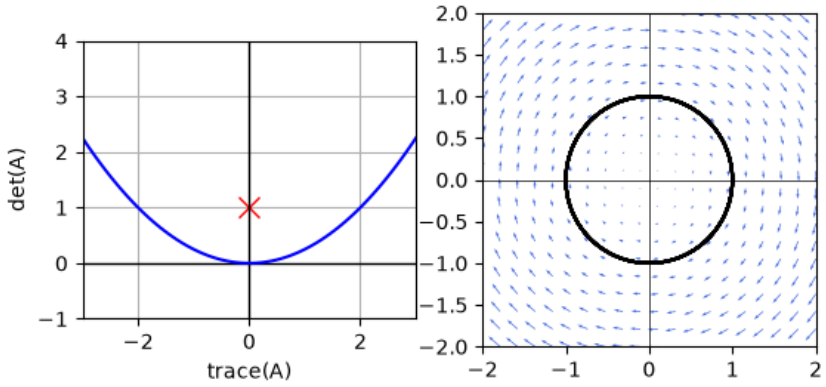
Les trajectoires sont des courbes fermées entourant l'origine.

On peut remarquer que

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = 2xx' + 2yy' = 2xy - 2xy = 0.$$

Les trajectoires sont donc les cercles d'équation

$$x^2 + y^2 = C.$$



Exercice 17. Pour le système suivant, discuter de la nature de l'origine en fonction du paramètre $p > 0$.

$$x'' + 2(p-1)x' + x = 0$$

Correction. Soit $p > 0$. En posant $y = x'$, on voit que $x" + 2(p-1)x' + x = 0$ se réécrit

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + 2(1-p)y \end{cases}$$

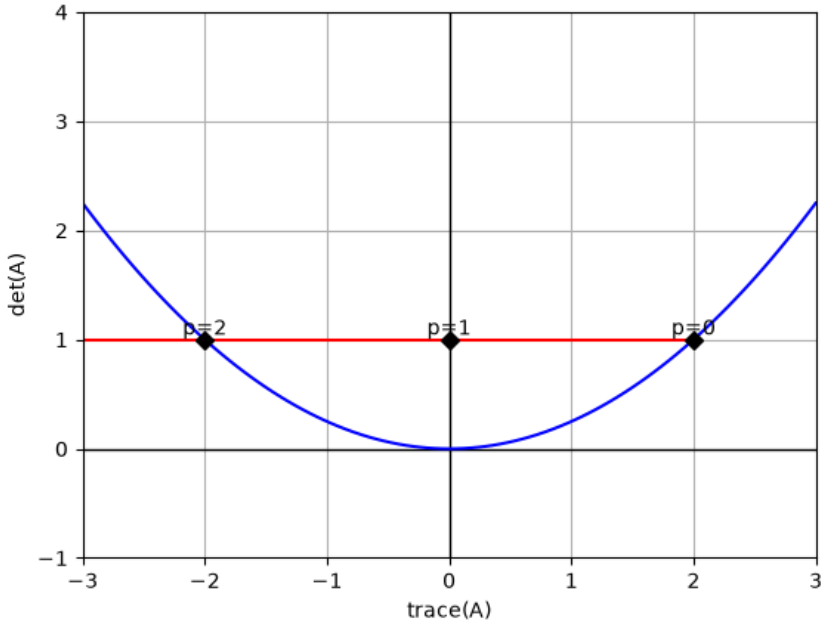
Ceci correspond à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2(1-p) \end{pmatrix}$. La trace est $T(p) = 2(1-p)$ et le déterminant est $D = 1$. Le discriminant est

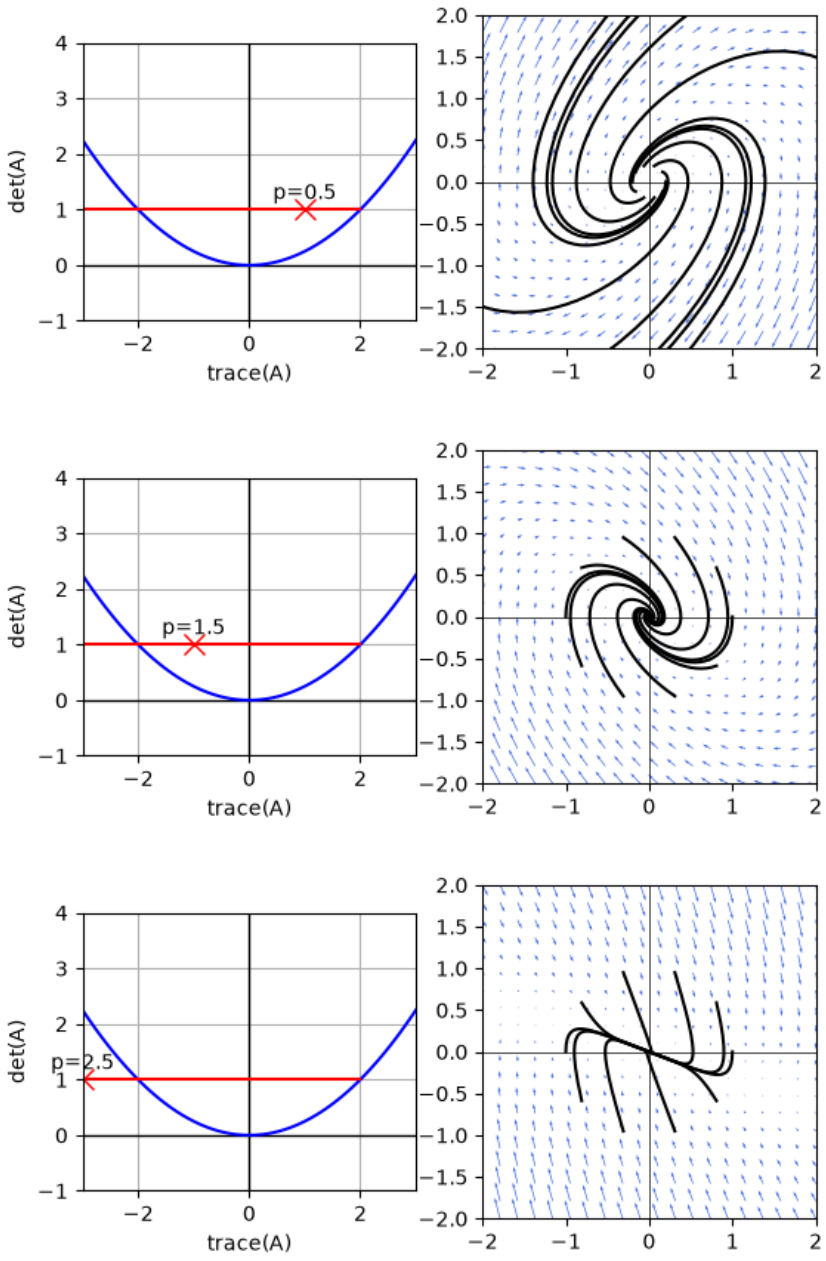
$$\Delta(p) = 4(1-p)^2 - 4 = 4p(p-2).$$

On voit donc que la solution est stable pour $p > 1$ (car $\mathrm{Tr}(A) > 0$) et instable pour $p < 1$. De plus on a une solution complexe si $p < 2$ et réelle si $p > 2$. La solution est donc

- Une spirale instable pour $0 < p < 1$
- Un centre pour $p = 1$
- Une spirale stable pour $1 < p < 2$
- un foyer dégénéréer pour $p = 2$
- un foyer pour $p > 2$

On peut représenter ceci dans un diagramme de poincaré.





Exercice 18. Etudier le système linéaire suivant en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x' = x - 2y + \lambda x \\ y' = 2x - 4y \end{cases}$$

Correction. La matrice s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} 1+\lambda & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

La trace est

$$T(\lambda) = \lambda - 3,$$

le déterminant est

$$D(\lambda) = -4\lambda,$$

et le discriminant est

$$G(\lambda) = T(\lambda)^2 - 4D(\lambda) = (\lambda-3)^2 + 16\lambda = \lambda^2 + 10\lambda + 9.$$

La situation est plus compliquée à décrire en détail, mais pour la stabilité c'est assez simple :

— Si $\lambda > 0$, alors $D(\lambda) < 0$, donc on a un point selle (instable).

— Si $\lambda = 0$, une valeur propre est nulle et l'autre est -3. C'est un cas dégénéré.
— Si $\lambda < 0$, alors le déterminant est positif et la trace est négative. On a donc un point stable (foyer ou spirale, cela reste à déterminer).

Pour connaître la nature précise de $(0,0)$ dans le cas $\lambda < 0$, il reste à étudier le signe du discriminant $G(\lambda)$. C'est un polynôme du second degré de discriminant

$$\Delta = 64 = 8^2 > 0,$$

qui admet deux racines négatives :

$$\lambda_1 = -9 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = -1.$$

On a donc :

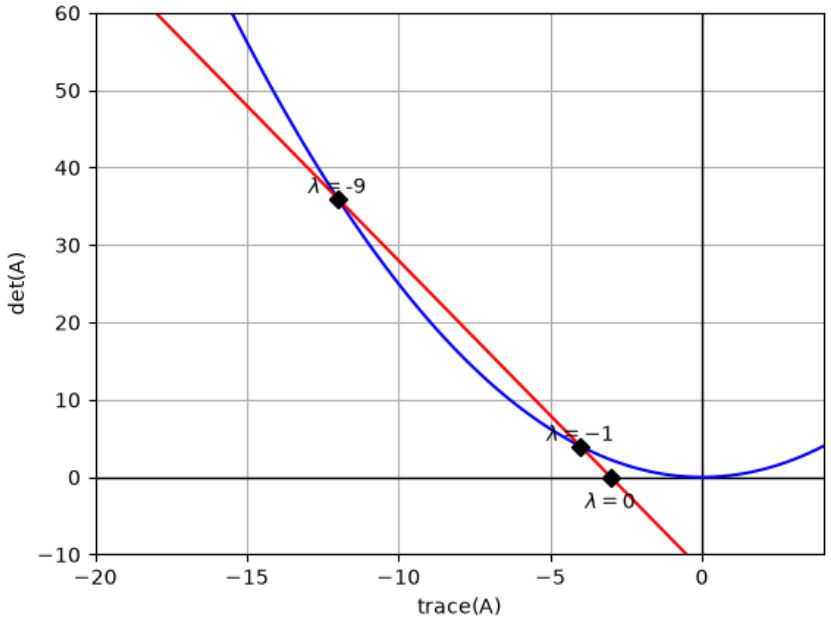
— $G(\lambda) < 0$ pour $\lambda \in]-9, -1[$. Dans ce cas les valeurs propres sont complexes et les trajectoires sont des spirales.
— $G(\lambda) = 0$ pour $\lambda \in \{-9, -1\}$. Dans ce cas les deux valeurs propres sont confondues.
— $G(\lambda) > 0$ pour $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [-9, -1]$. Dans ce cas les valeurs propres sont réelles.

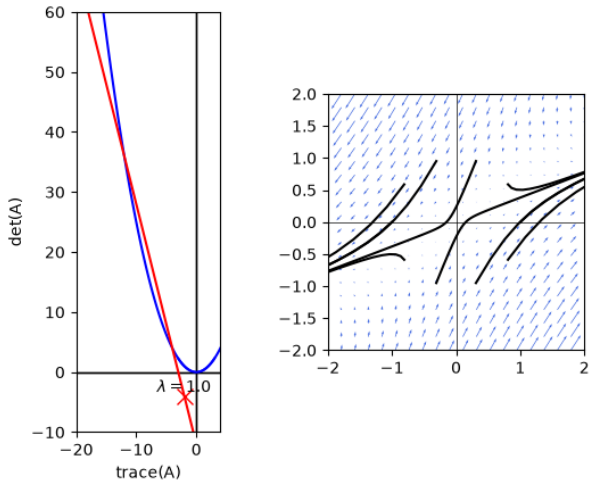
En regroupant les informations précédentes, on obtient :

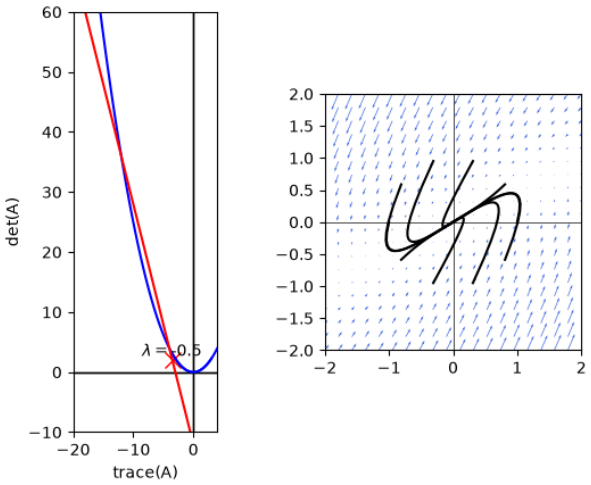
— Si $\lambda > 0$, alors $D(\lambda) < 0$, donc on a un point selle (instable).
— Si $\lambda = 0$, une valeur propre est nulle et l'autre est -3. C'est un cas dégénéré.
— Si $-1 < \lambda < 0$, alors le déterminant est positif, la trace est négative et le discriminant est positif : on a un noeud stable.
— Si $\lambda = -1$, alors le déterminant est positif, la trace est négative et le discriminant est nul : on a un noeud dégénéré stable.
— Si $-9 < \lambda < -1$, alors le déterminant est positif, la trace est négative et le discriminant est négatif : on a une spirale stable.
— Si $\lambda = -9$, alors le déterminant est positif, la trace est négative et le discriminant est nul : on a un noeud dégénéré stable.
— Si $\lambda < -9$, alors le déterminant est positif, la trace est négative et le discriminant est positif : on a un noeud stable.

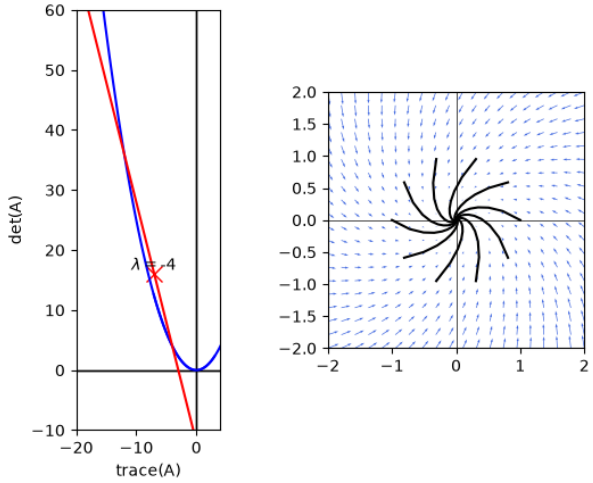
On peut représenter la situation dans un diagramme de poincaré. Pour ce faire, on peut écrire $\lambda = \mathrm{Tr}(A) + 3$ et donc comme $D(lambda) = -4\lambda$ l'ensemble des points $(\mathrm{Tr}(A), \mathrm{Det}(A))$ correspond à la droite d'équation

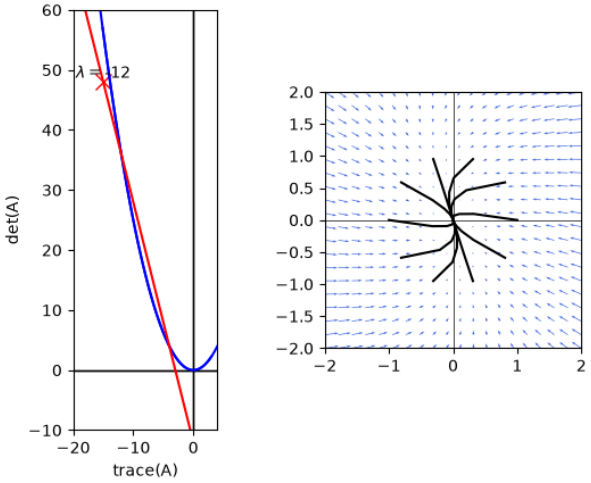
$$\mathrm{Det}(A) = -4(\mathrm{Tr}(A) + 3).$$




det(A)
trace(A)
λ = -1.0


det(A)
trace(A)
λ = -0.5


det(A)
trace(A)
λ = -4


det(A)
trace(A)
λ = -12

3 Systèmes non linéaires en dimension 2.

Exercice 19. Pour les systèmes suivants, étudier les points stationnaires et la nature des points stationnaires puis calculer les isoclines et en déduire le où les comportements possibles du système par une analyse graphique.

$$(a1)\ \begin{cases} x' = x(1-x+2y) \\ y' = y(1-y+2x) \end{cases}, \quad (a2)\ \begin{cases} x' = x(1-2x+y) \\ y' = y(1-2y+x) \end{cases}, \quad (a3)\ \begin{cases} x' = x(1+y) \\ y' = y(1+x) \end{cases}$$

$$(b1)\ \begin{cases} x' = x(1-x-2y) \\ y' = y(1-y-2x) \end{cases}, \quad (b2)\ \begin{cases} x' = x(1-2x-y) \\ y' = y(1-2y-x) \end{cases}, \quad (b3)\ \begin{cases} x' = x(1-y) \\ y' = y(1-x) \end{cases}$$

$$(c1)\ \begin{cases} x' = x(1-x-2y) \\ y' = y(1-y+2x) \end{cases}, \quad (c2)\ \begin{cases} x' = x(1-2x-y) \\ y' = y(1-2y+x) \end{cases}, \quad (c3)\ \begin{cases} x' = x(1-y) \\ y' = y(1+x) \end{cases}$$

Correction. Tout d'abord on pourra remarquer que dans tous ces système x est en facteur de l'équation de x' donc l'ensemble $x = 0$ est un invariant du système d'équation. De même y est en facteur de y' donc l'ensemble $y = 0$ est invariant. Par l'unicité dans Cauchy Lipschitz, on en déduit donc que si la condition initiale statisfait $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ (cest-à-dire que $x(0) > 0$ et $y(0) > 0$) alors $(x(t), y(t))$ reste dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ pour tout t. En d'autre terme, $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et aussi un invariant du système.

Néanmoins comme ce fait n'est pas mentionné dans l'énoncé, on étudiera les équations dans $\mathbb{R}^2$ tout entier.

Méthode commune. Pour chaque système

$$\begin{cases} x' = f_1(x,y), \\ y' = f_2(x,y), \end{cases}$$

on détermine :

— les points stationnaires (x^*, y^*) tels que $f_1(x^*, y^*) = 0$, $f_2(x^*, y^*) = 0$;

— la jacobienne

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

et sa valeur $J^* = J(x^*, y^*)$ pour chaque point stationnaire ;

— la nature de (x^*, y^*) via $\mathrm{tr}(J^*)$ et $\det(J^*)$ comme dans le chapitre 2 ;

— les isoclines $x' = 0$ et $y' = 0$.

(a1) $\begin{cases} x' = x(1-x+2y) \\ y' = y(1-y+2x) \end{cases}$

Points stationnaires :

$$(0,0), \quad (0,1), \quad (1,0), \quad (-1,-1).$$

Jacobienne :

$$f_1(x,y) = x(1-x+2y), \qquad f_2(x,y) = y(1-y+2x),$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 1-2x+2y, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 2x,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 2y, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = 1-2y+2x,$$

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 1-2x+2y & 2x \\ 2y & 1-2y+2x \end{pmatrix}.$$

Nature :

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : (0,0) \text{ est une source (cad un noeud instable.)}$$

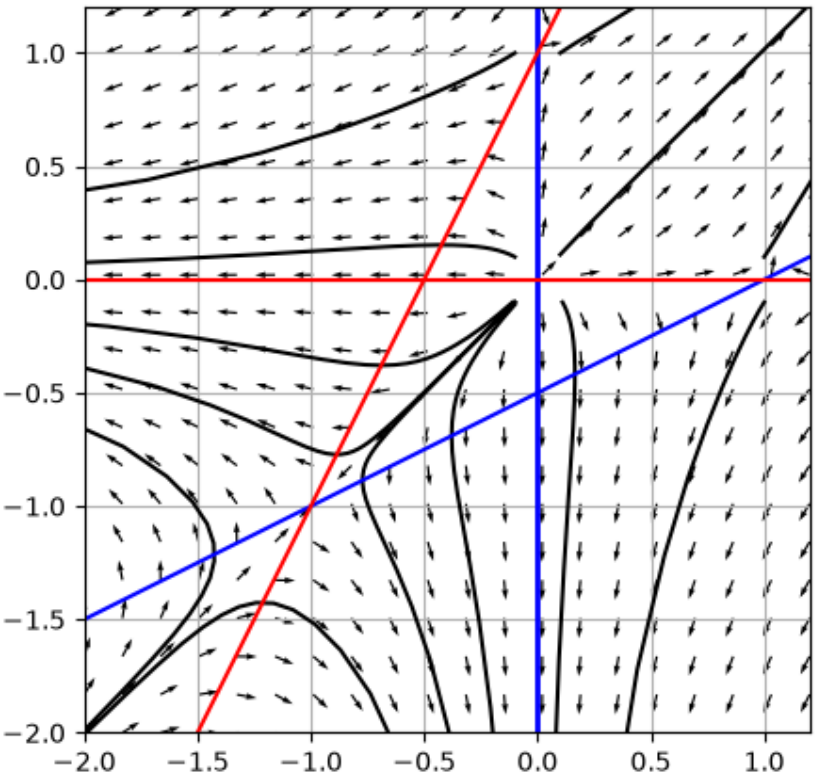
$$J(0,1) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ 2 valeurs propres de signes contraires : } (0,1) \text{ est un point selle.}$$

$$J(1,0) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ 2 valeurs propres de signes contraires : } (1,0) \text{ est un point selle.}$$

$$J(-1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} det = -3 < 0 : (-1,-1) \text{ est un point selle.}$$

Isoclines :

$$x' = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x - 2y = 1, \qquad y' = 0 \iff y = 0 \text{ ou } -2x + y = 1.$$



(a2) $\begin{cases} x' = x(1 - 2x + y) \\ y' = y(1 - 2y + x) \end{cases}$

Points stationnaires :

$$(0,0), \quad (0,\frac{1}{2}), \quad (\frac{1}{2},0), \quad (1,1).$$

Jacobienne :

$$f_1(x,y) = x(1 - 2x + y), \qquad f_2(x,y) = y(1 - 2y + x),$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 1 - 4x + y, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = x,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = y, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = 1 - 4y + x,$$

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 1 - 4x + y & x \\ y & 1 - 4y + x \end{pmatrix}.$$

Nature :

$$J(0,0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} : (0,0) \text{ est une source (cad un noeud instable.)}$$

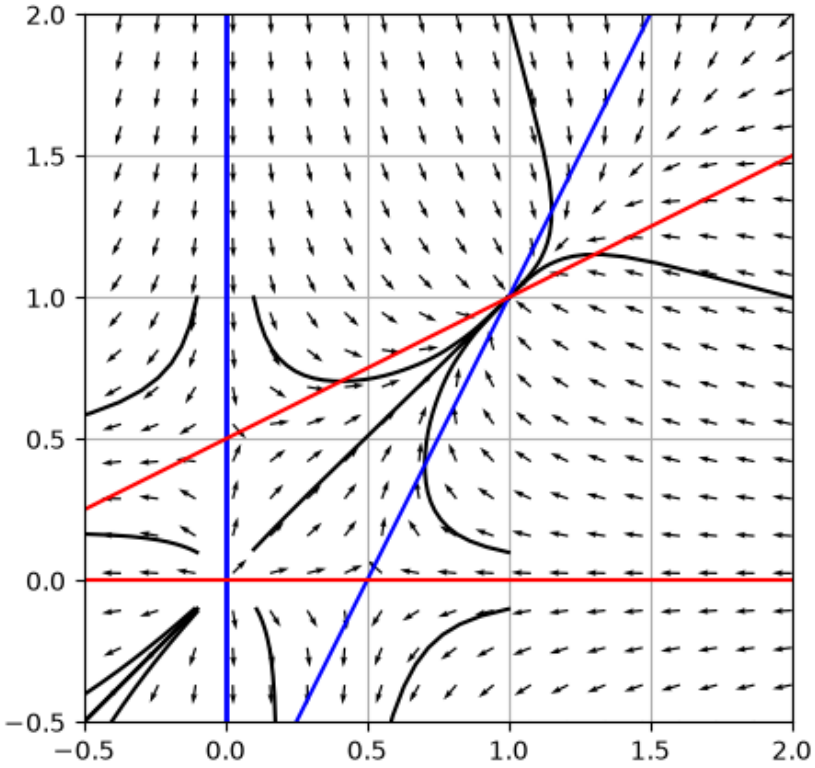
$$J(0,\frac{1}{2})=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & -1\end{pmatrix} \text{ 2 valeurs propres de signes contraires : } (0,\frac{1}{2}) \text{ est un point selle.}$$

$$J(\frac{1}{2},0)=\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{3}{2}\end{pmatrix} \text{ 2 valeurs propres de signes contraires : } (\frac{1}{2},0) \text{ est un point selle.}$$

$J(1,1)=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ $det=+3>0$, $tr=-4$ $\Delta=(-4)^2-4det=16-12>0$: $(1,1)$ est un puit (noeud stable).

Isoclines :

$$x'=0 \iff x=0 \text{ ou } 2x-y=1, \qquad y'=0 \iff y=0 \text{ ou } 2y-x=1.$$



(a3) $\begin{cases} x'=x(1+y) \\ y'=y(1+x) \end{cases}$

Points stationnaires :

$$(0,0), \quad (-1,-1).$$

Jacobienne :

$$J(x,y)=\begin{pmatrix}1+y & x\\ y & 1+x\end{pmatrix}.$$

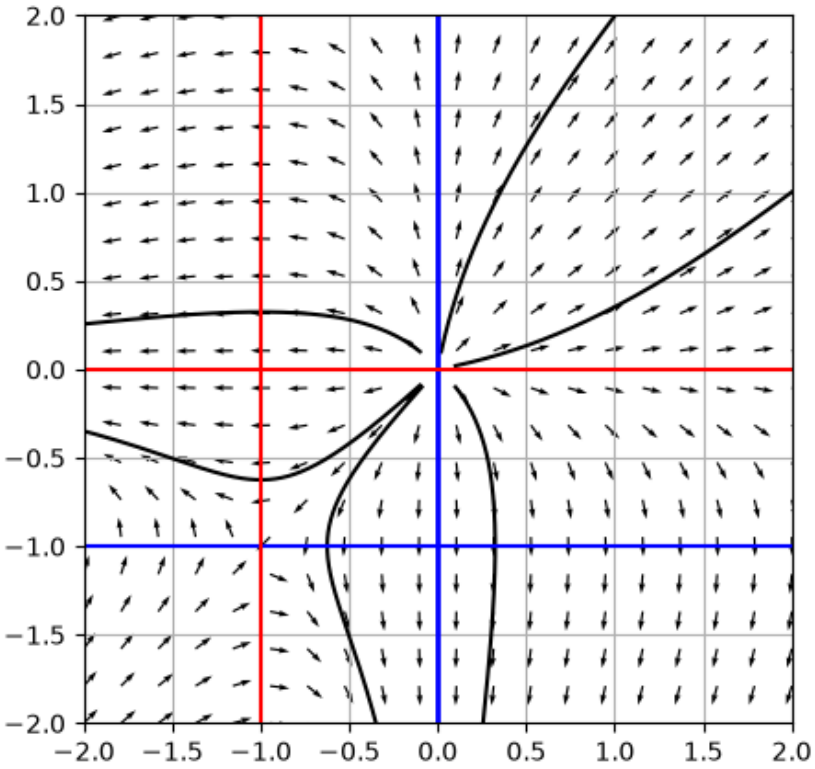
Nature :

$$J(0,0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} : (0,0) \text{ est une source (cad un noeud instable.)}$$

$$J(-1,-1)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix} det=-1<0 : (-1,-1) \text{ est un point selle.}$$

Isoclines :

$x' = 0 \iff x = 0$ ou $y = -1$, $\quad y' = 0 \iff y = 0$ ou $x = -1$.



(b1) $\begin{cases} x' = x(1-x-2y) \\ y' = y(1-y-2x) \end{cases}$

Points stationnaires :

$$(0,0), \quad (0,1), \quad (1,0), \quad (\frac{1}{3},\frac{1}{3}).$$

Jacobienne :

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 1-2x-2y & -2x \\ -2y & 1-2x-2y \end{pmatrix}.$$

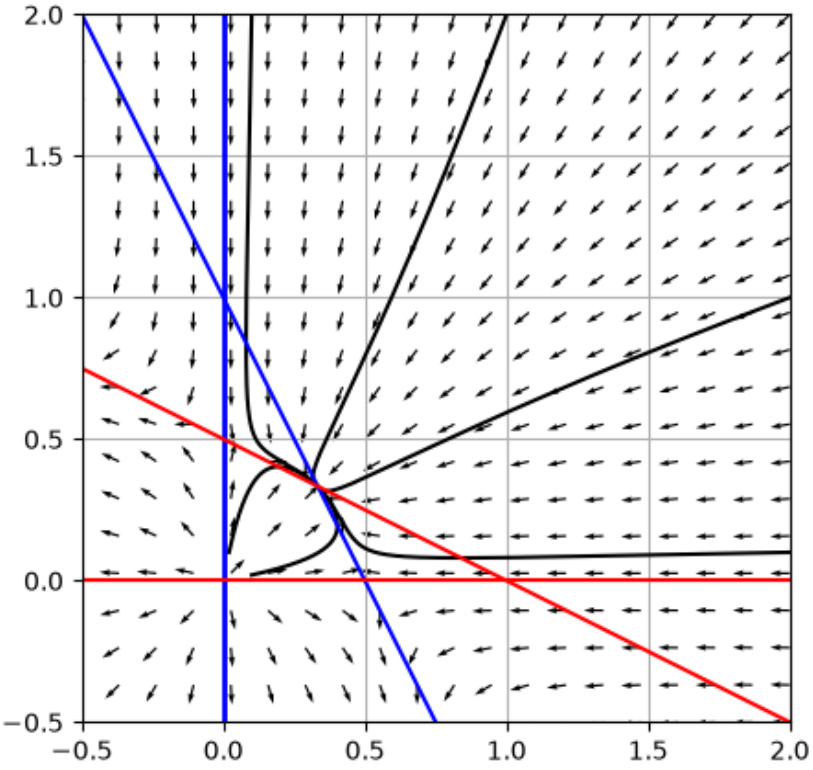
Nature :

$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: $(0,0)$ est une source (cad un noeud instable.)

$J(0,1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$: $(0,1)$ est un puit (cad un noeud stable.)

$J(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: $(1,0)$ est un puit (cad un noeud stable.)

$J(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ $det < 0$: $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ est un point selle.



(b2) $\begin{cases} x' = x(1-2x-y) \\ y' = y(1-2y-x) \end{cases}$

Points stationnaires :

$$(0,0), \quad (0,\frac{1}{2}), \quad (\frac{1}{2},0), \quad (\frac{1}{3},\frac{1}{3}).$$

Jacobienne :

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 1-4x-y & -x \\ -y & 1-x-4y \end{pmatrix}.$$

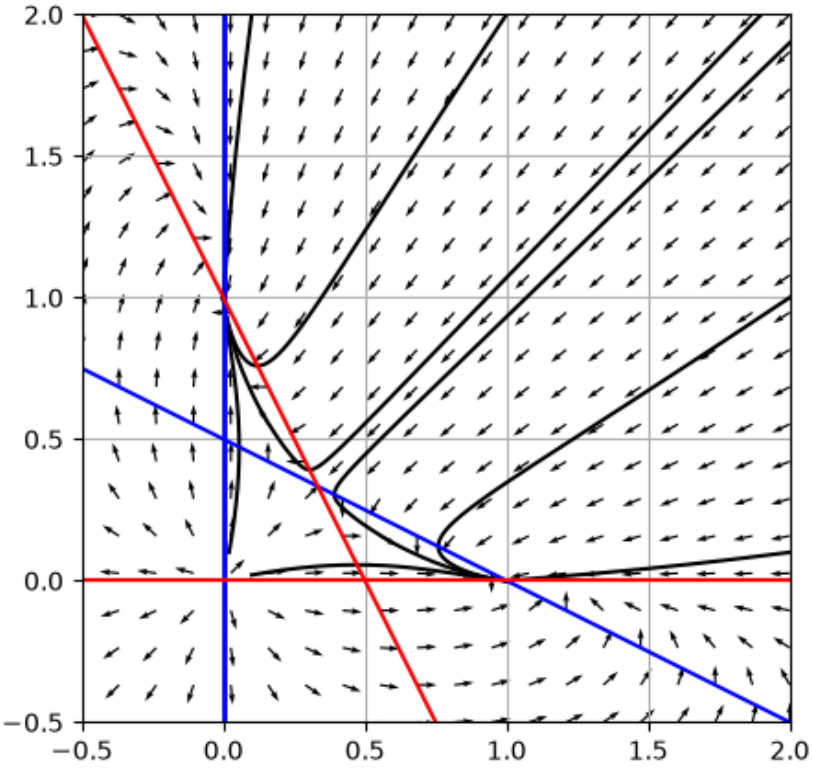
Nature :

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : (0,0) \text{ est une source (cad un noeud instable.)}$$

$$J(0,\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} : (\frac{1}{2},0) \text{ est un point selle}$$

$$J(\frac{1}{2},0) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} : (\frac{1}{2},0) \text{ est un point selle}$$

$$J(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} (\frac{1}{3},\frac{1}{3}) \text{ est un puit.}$$



(b3) $\begin{cases} x' = x(1-y) \\ y' = y(1-x) \end{cases}$

Points stationnaires :

$$(0,0), \quad (1,1).$$

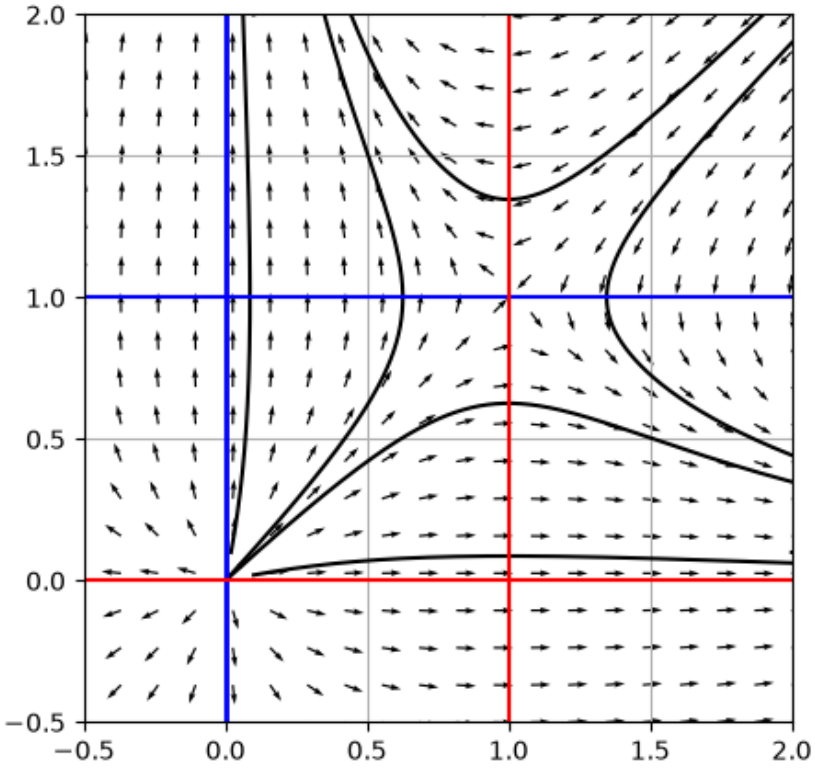
Jacobienne :

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 1-y & -x \\ -y & 1-x \end{pmatrix}.$$

Nature :

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : (0,0) \text{ est une source (cad un noeud instable.)}$$

$$J(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} det < 0 : (1,1) \text{ est un point selle.}$$



(c1) $\begin{cases} x' = x(1-x-2y) \\ y' = y(1-y+2x) \end{cases}$

Points stationnaires :

$$(0,0), \quad (0,1), \quad (1,0), \quad (-\frac{1}{5},\frac{3}{5}).$$

Jacobienne :

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 1-2x-2y & -2x \\ 2y & 1+2x-2y \end{pmatrix}.$$

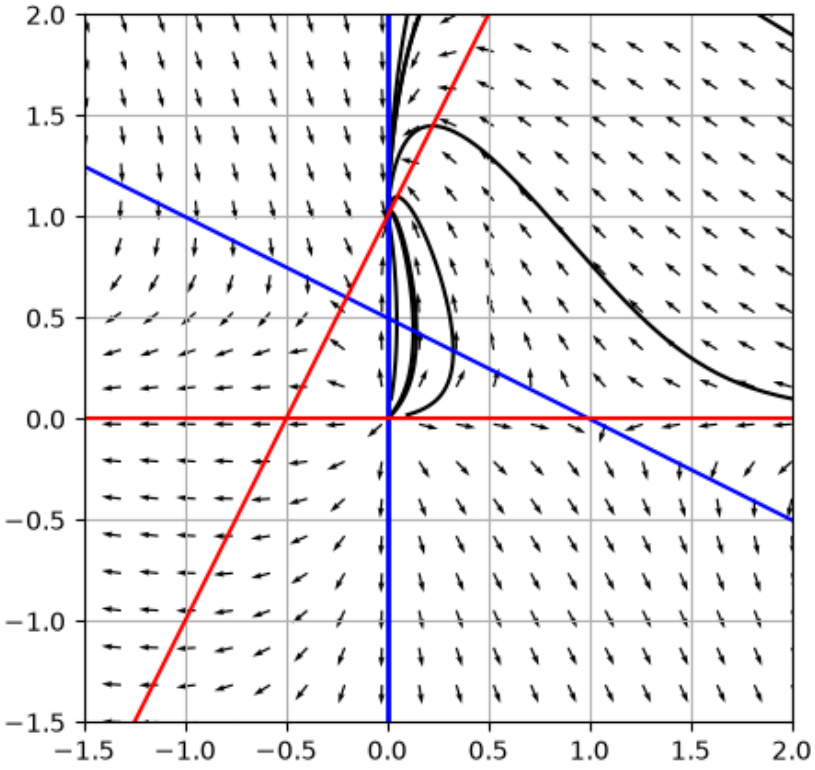
Nature :

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : (0,0) \text{ est une source (cad un noeud instable.)}$$

$$J(0,1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} : (0,1) \text{ est un puit (cad un noeud stable.)}$$

$$J(1,0) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} : (1,0) \text{ est un point selle}$$

$$J(-\frac{1}{5},\frac{3}{5}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} det < 0 : (-\frac{1}{5},\frac{3}{5}) \text{ est un point selle.}$$



(c2) $\begin{cases} x' = x(1-2x-y) \\ y' = y(1-2y+x) \end{cases}$

Points stationnaires :

$$(0,0), \quad (0,\frac{1}{2}), \quad (\frac{1}{2},0), \quad (\frac{1}{5},\frac{3}{5}).$$

Jacobienne :

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 1-4x-y & -x \\ y & 1+x-4y \end{pmatrix}.$$

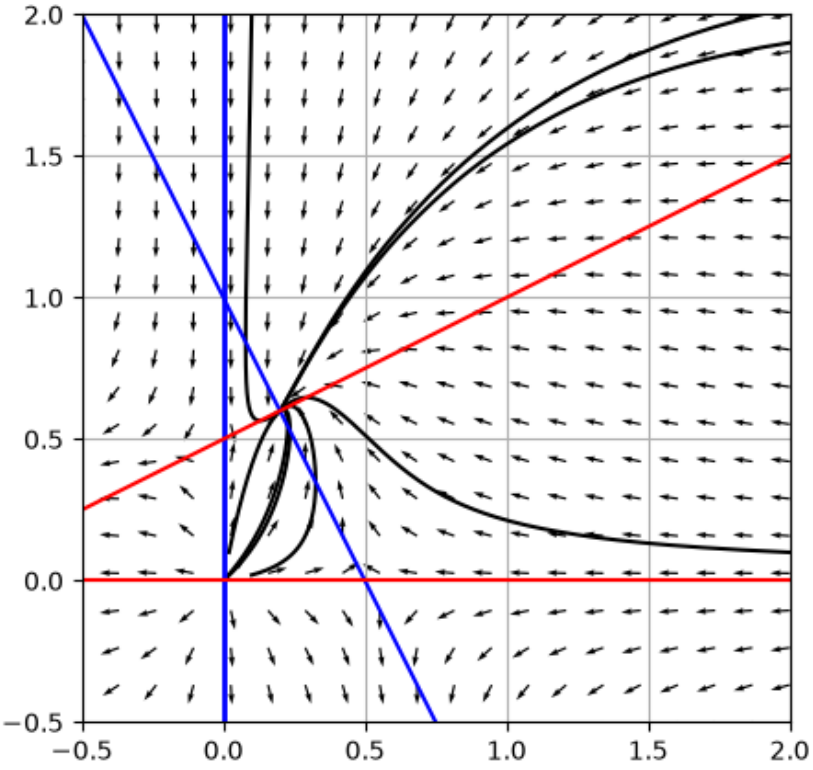
Nature :

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : (0,0) \text{ est une source (cad un noeud instable.)}$$

$$J(0,\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} : (\frac{1}{2},0) \text{ est un point selle}$$

$$J(\frac{1}{2},0) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} : (\frac{1}{2},0) \text{ est un point selle}$$

$$J(\frac{1}{5},\frac{3}{5}) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{6}{5} \end{pmatrix} : det = 3/5,\ tr = -8/5,\ \Delta = 4/25\,;\ (\frac{1}{5},\frac{3}{5}) \text{ est un puit.}$$



(c3) $\begin{cases} x' = x(1-y) \\ y' = y(1+x) \end{cases}$

Points stationnaires :

$$(0,0), \quad (-1,1).$$

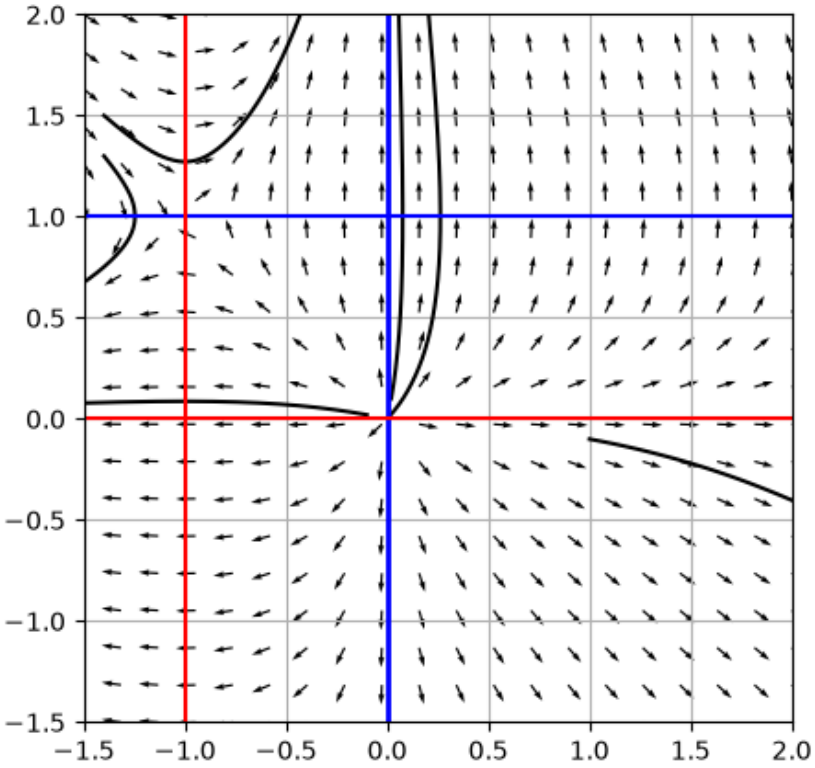
Jacobienne :

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 1-y & -x \\ y & 1+x \end{pmatrix}.$$

Nature :

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : (0,0) \text{ est une source (cad un noeud instable.)}$$

$$J(-1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} det < 0 : (1,1) \text{ est un point selle.}$$



Exercice 20. Pour les systèmes suivants, étudier les points stationnaires et la nature des points stationnaires puis calculer les isoclines et en déduire le où les comportements possibles du système par une analyse graphique.

(a) $y'' + y' + y(1-y) = 0$, (b) $y'' + 3y' + y(y-1) = 0$, (c) $y'' + y' + y(1-y)(y-0.5) = 0$.

Correction. Méthode commune (équations d'ordre 2). On considère une EDO scalaire d'ordre 2

$$y'' = F(y, y').$$

On pose

$$z = y',$$

et on obtient un système d'ordre 1 en dimension 2 :

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = F(y, z). \end{cases}$$

On applique ensuite la méthodologie de linéarisation :

— Points stationnaires : (y^*, z^*) tels que $y' = 0$, $z' = 0$, donc $z^* = 0$ et $F(y^*, 0) = 0$.

— Jacobienne :

$$J(y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y'}{\partial y} & \dfrac{\partial y'}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z'}{\partial y} & \dfrac{\partial z'}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

— Nature de chaque point stationnaire via $\mathrm{tr}(J^*)$, $\det(J^*)$ et les valeurs propres.

(a) $y'' + y' + y(1-y) = 0$ On écrit

$$y'' = -y' - y(1-y).$$

En posant $z = y'$, on obtient le système

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = -z - y(1-y). \end{cases}$$

Points stationnaires. On impose $y' = 0$ et $z' = 0$:

$$z = 0, \qquad -z - y(1-y) = 0 \Rightarrow y(1-y) = 0.$$

Donc

$$(y^*, z^*) \in \{(0,0), (1,0)\}.$$

Jacobienne. On a

$$f_1(y,z) = z, \qquad f_2(y,z) = -z - y(1-y) = -z - y + y^2.$$

Alors

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial z} = 1,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = -1 + 2y, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial z} = -1,$$

$$J(y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1+2y & -1 \end{pmatrix}.$$

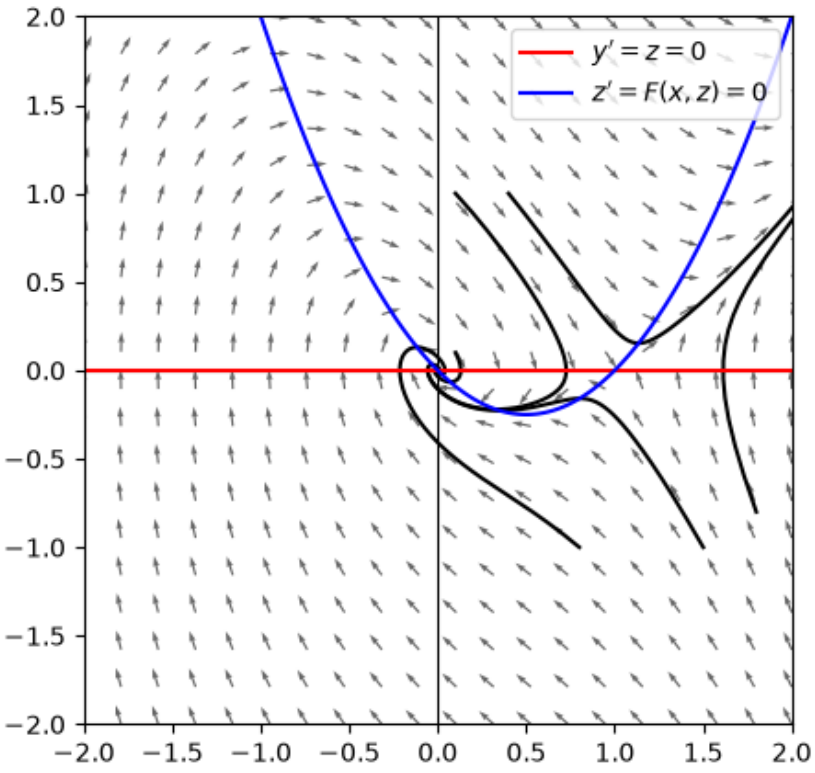
En $(0,0)$:

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2},$$

$\Re(\lambda) < 0$: **foyer (spirale) stable**.
En $(1,0)$:

$$J(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

une valeur propre > 0, une < 0 : **selle instable**.



(b) $y'' + 3y' + y(y-1) = 0$ On écrit

$$y'' = -3y' - y(y-1).$$

En posant $z = y'$, on obtient

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = -3z - y(y-1). \end{cases}$$

Points stationnaires.

$$z = 0, \qquad -3z - y(y-1) = 0 \Rightarrow y(y-1) = 0,$$

donc

$$(y^*, z^*) \in \{(0,0), (1,0)\}.$$

Jacobienne.

$$f_1(y,z) = z, \qquad f_2(y,z) = -3z - y(y-1) = -3z - y^2 + y.$$

Alors

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial z} = 1,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = -2y + 1, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial z} = -3,$$

$$J(y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2y+1 & -3 \end{pmatrix}.$$

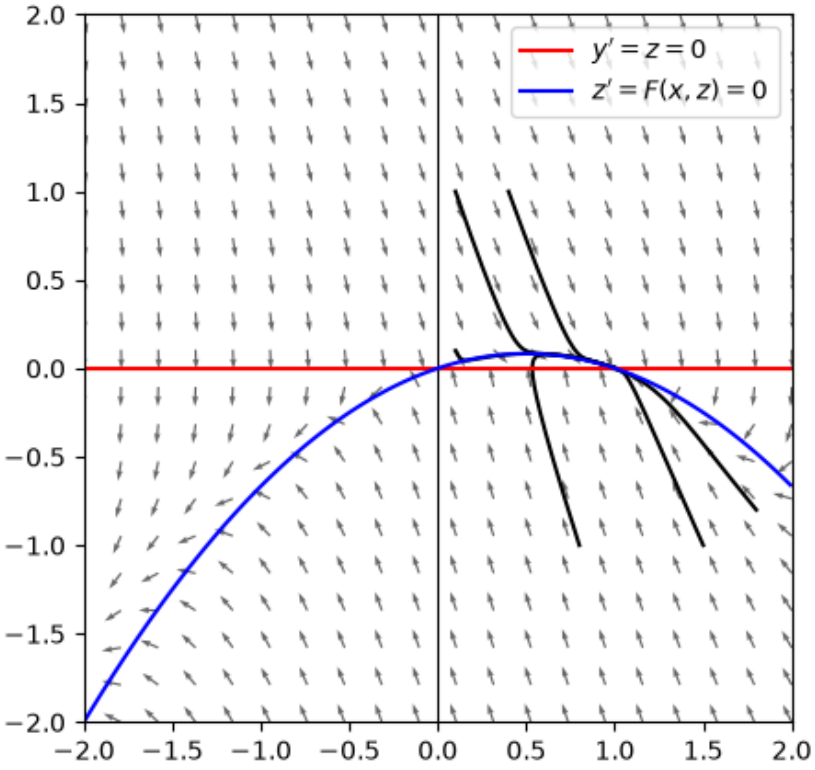
En $(0,0)$:

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2},$$

une valeur propre > 0, une < 0 : **selle instable**.
En $(1,0)$:

$$J(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2},$$

les deux valeurs propres sont < 0 : **nœud stable**.



(c) $y'' + y' + y(1-y)(y-0.5) = 0$ On écrit

$$y'' = -y' - y(1-y)(y-0.5).$$

En posant $z = y'$, on obtient

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = -z - y(1-y)(y-0.5). \end{cases}$$

Points stationnaires.

$$z = 0, \qquad -z - y(1-y)(y-0.5) = 0 \Rightarrow y(1-y)(y-0.5) = 0,$$

donc

$$(y^*, z^*) \in \{(0,0), (1,0), (0.5,0)\}.$$

Jacobienne. On note

$$g(y) = y(1-y)(y-0.5).$$

Alors

$$f_1(y,z) = z, \qquad f_2(y,z) = -z - g(y).$$

On a

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial z} = 1,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = -g'(y), \qquad \frac{\partial f_2}{\partial z} = -1.$$

Calcul de $g'(y)$: On peut développer

$$g(y) = y(1-y)(y-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{3}{2}y^2 - \tfrac{1}{2}y - y^3,$$

donc

$$g'(y) = 3y - \tfrac{1}{2} - 3y^2.$$

Ainsi

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = -g'(y) = -3y + \tfrac{1}{2} + 3y^2,$$

et

$$J(y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3y + \frac{1}{2} + 3y^2 & -1 \end{pmatrix}.$$

En $(0,0)$:

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 + \lambda + \tfrac{1}{2} = 0,$$

discriminant $1 - 2 = -1 < 0$, $\Re(\lambda) = -\frac{1}{2} < 0$: **foyer stable**.
En $(0.5, 0)$:

$$-3y + \tfrac{1}{2} + 3y^2\big|_{y=1/2} = -\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4} = -\tfrac{1}{4},$$

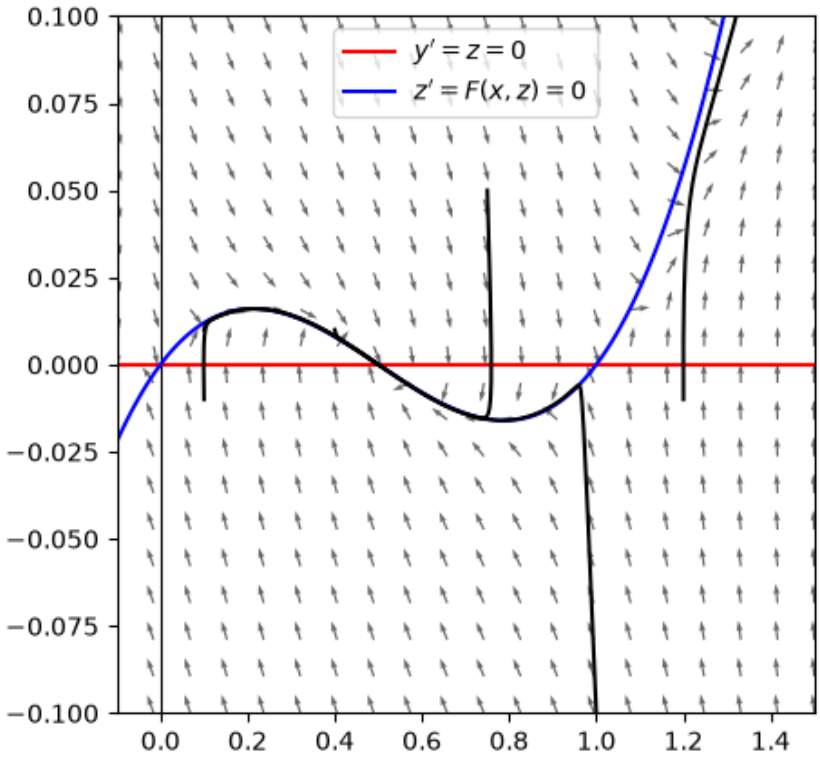
$$J(0.5,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 + \lambda + \tfrac{1}{4} = 0,$$

discriminant $1 - 1 = 0$, double racine $\lambda = -\frac{1}{2} < 0$: **nœud (dégénéré) stable**.
En $(1,0)$:

$$-3y + \tfrac{1}{2} + 3y^2\big|_{y=1} = -3 + \tfrac{1}{2} + 3 = \tfrac{1}{2},$$

$$J(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix},$$

même matrice qu'en $(0,0)$: **foyer stable**.



Exercice 21. [Le pendule] Soit un pendule de longeur ℓ faisant un angle $\theta(t)$ avec la verticale au temps t. Le système du pendule simple sans frottement est est

$$\ell\theta'' + g\sin(\theta) = 0.$$

1. En utilisant le fait que $\sin(\theta) \approx \theta$ lorsque $\theta \to 0$, étudier le système pour de petite valeur de θ.
2. Faire l'étude générale (autant que possible).
3. Lorsque l'on prend en compte les frottements de l'air, en notant m la masse du pendule et k le coefficient de frottement, l'équation devient $\ell\theta'' + g\sin(\theta) = -\frac{k}{m\ell}\theta'$. Étudier cette nouvelle équation.

Correction. L'équation différentielle d'un pendule simple de longueur ℓ sans frottement est donnée par :

$$\ell\theta'' + g\sin(\theta) = 0$$

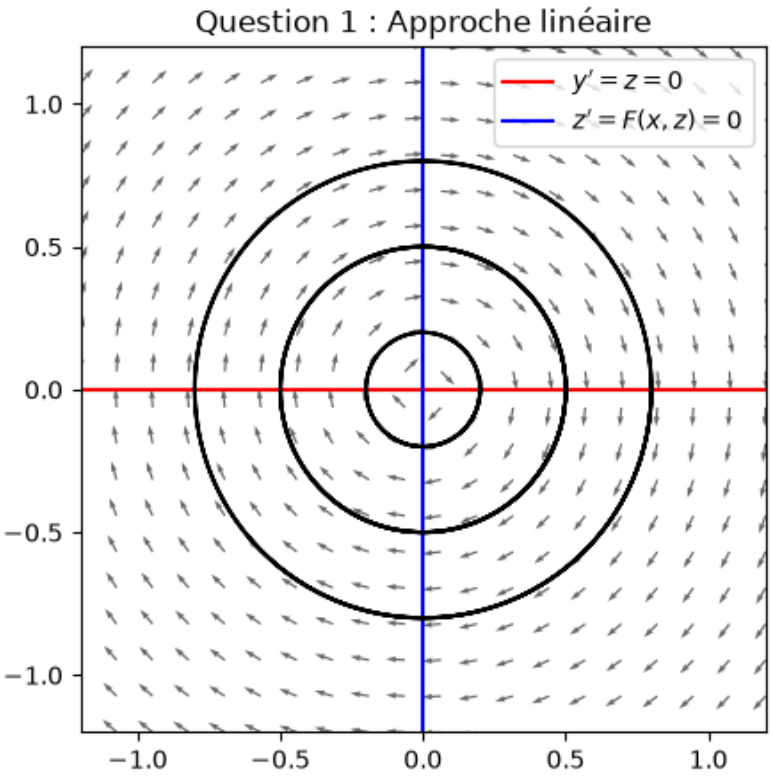
Pour étudier ce système dans le plan de phase, on pose $x = \theta$ (position angulaire) et $y = \theta'$ (vitesse angulaire). Ce système du second ordre se réécrit comme un système autonome du premier ordre :

$$\begin{cases} x' = f(x,y) = y \\ y' = g(x,y) = -\dfrac{g}{\ell}\sin(x) \end{cases} \tag{1}$$

1. **Étude pour de petites valeurs de θ (linéarisation) :** Lorsque $\theta \to 0$, on effectue un développement limité au premier ordre : $\sin(x) \approx x$. Le système (1) se linéarise autour de l'équilibre $(0,0)$ sous la forme $X' = AX$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{\ell} & 0 \end{pmatrix}$$

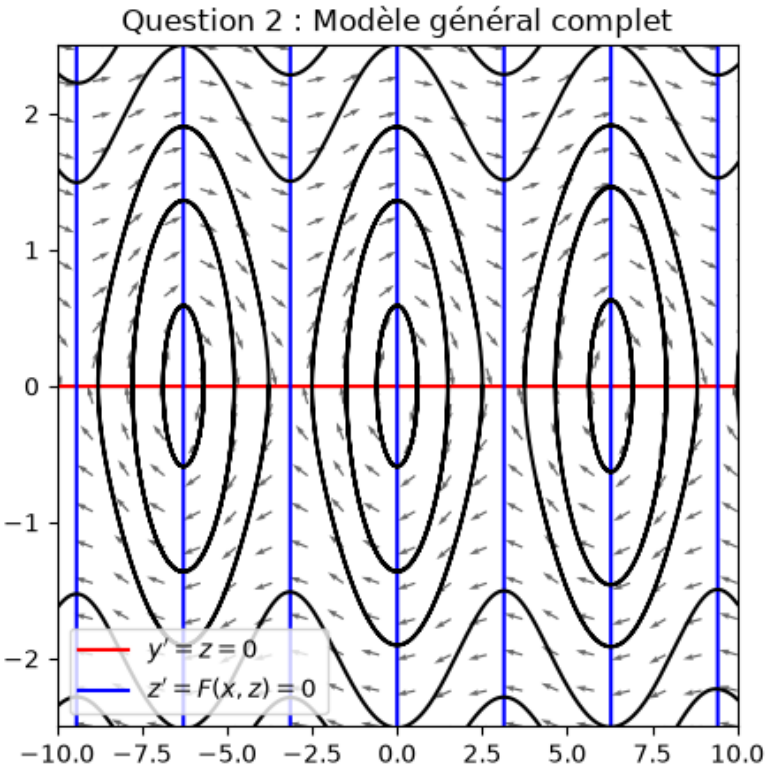
Les valeurs propres de la matrice A vérifient l'équation caractéristique $\lambda^2 + \frac{g}{\ell} = 0$, soit $\lambda = \pm i\omega_0$ où $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$. Les valeurs propres étant purement imaginaires conjuguées, l'équilibre $(0,0)$ est un **centre (neutrement stable)**. Les trajectoires au voisinage de l'origine forment des ellipses fermées, ce qui correspond géométriquement à des oscillations périodiques harmoniques.



2. **Étude générale (sans frottement) :** Les points d'équilibre du système non linéaire général vérifient simultanément $x' = 0$ et $y' = 0$, d'où $y = 0$ et $\sin(x) = 0$. On obtient une infinité de points fixes situés sur l'axe des abscisses : $E_k = (k\pi, 0)$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Par périodicité de la fonction sinus, on restreint l'analyse à l'intervalle $x \in [-\pi, \pi]$:

— **Équilibre bas** $E_0 = (0, 0)$ **:** Comme établi précédemment, il s'agit d'un **centre**.

— **Équilibre haut** $E_\pi = (\pi, 0)$ **(et** $(-\pi, 0)$**) :** La matrice jacobienne en ce point s'écrit $J(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell} & 0 \end{pmatrix}$. Ses valeurs propres sont réelles et de signes opposés : $\lambda = \pm\sqrt{\frac{g}{\ell}}$. L'équilibre instable du pendule pointé vers le haut est donc un **point-col (selle)**.



Remarque hors programme. Le système étant conservatif, il admet une constante du mouvement correspondant à l'énergie mécanique totale $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E}(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{g}{\ell}\cos(x) = \textit{Constante}$$

Les lignes de niveau de cette fonction définissent le portrait de phase global. On y observe des trajectoires fermées (oscillations) autour de l'origine, séparées des mouvements de révolution continue par des ***séparatrices homoclines*** *(les orbites d'énergie limite $\mathcal{E} = g/\ell$) qui relient les points-cols $(\pm\pi, 0)$ entre eux.*

3. **Prise en compte des frottements de l'air :** En posant le coefficient d'amortissement $\gamma = \frac{k}{m\ell^2} > 0$, l'équation mécanique devient $\theta'' + \gamma\theta' + \frac{g}{\ell}\sin(\theta) = 0$. Le système dynamique associé s'écrit :

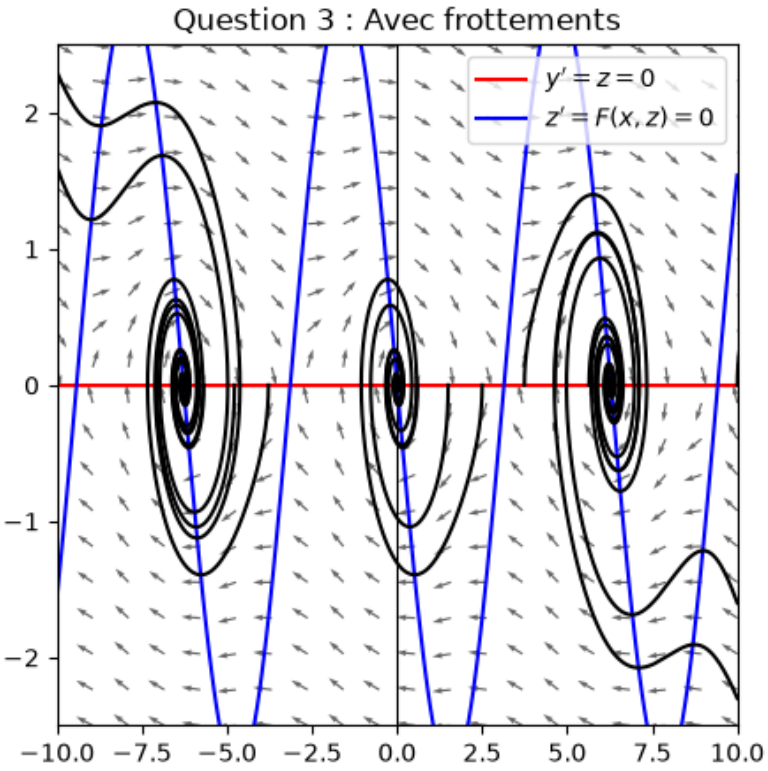
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\gamma y - \frac{g}{\ell}\sin(x) \end{cases} \tag{2}$$

La matrice jacobienne à l'origine $(0, 0)$ devient $J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & -\gamma \end{pmatrix}$, dont le polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \lambda^2 + \gamma\lambda + \frac{g}{\ell}$. Les deux valeurs propres possèdent désormais une partie réelle strictement négative ($\mathrm{Re}(\lambda) = -\gamma/2 < 0$).

— Si $\gamma^2 - 4\frac{g}{\ell} < 0$ (**sous-amortissement**), les valeurs propres sont complexes conjuguées. L'origine $(0, 0)$ devient un **foyer stable**. Les trajectoires forment des spirales qui convergent vers l'origine, traduisant des oscillations amorties.

— Si $\gamma^2 - 4\frac{g}{\ell} \geq 0$ (**sur-amortissement**), les valeurs propres sont réelles négatives. L'origine $(0, 0)$ est alors un **nœud stable**. Le pendule retourne à sa position d'équilibre sans osciller.

L'équilibre haut $(\pi, 0)$ reste quant à lui un **point-col** instable.



Exercice 22. Le modèle de proie prédateur avec croissance logistique de la proie s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} u' = u(1 - u/K - av) \\ v' = v(-r + bu) \end{cases}$$

où $u(t)$ et $v(t)$ décrivent la population de la proie et du prédateur respectivement et où K, a, b et r sont des constantes strictement positives. Etudier la dynamique de ce système dans le quadrant $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$. On précisera notamment pourquoi les solutions restent positives.

Correction.

Modèle et position du problème On considère le système différentiel plan suivant décrivant la dynamique d'une population de proies $u(t)$ et de prédateurs $v(t)$:

$$\begin{cases} u' = f(u, v) = u\left(1 - \dfrac{u}{K} - av\right) \\ v' = g(u, v) = v(-r + bu) \end{cases} \tag{3}$$

où K, a, b et r sont des constantes strictement positives. On étudie ce système dans le quadrant positif $\mathbb{R}_+^2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \geq 0, v \geq 0\}$.

Invariance et positivité des solutions Pour montrer que les solutions de conditions initiales positives ($u(0) > 0$ et $v(0) > 0$) restent positives pour tout $t \geq 0$, on étudie le comportement du champ de vecteurs sur les frontières du quadrant :

- **Sur l'axe $u = 0$ (absence de proies) :** Le système se réduit à $v' = -rv$, dont la solution explicite est $v(t) = v(0)e^{-rt}$. L'axe $u = 0$ est donc invariant pour le systéme.
- **Sur l'axe $v = 0$ (absence de prédateurs) :** Le système se réduit à l'équation logistique classique $u' = u\left(1 - \dfrac{u}{K}\right)$. L'axe $v = 0$ est invariant par le systéme.

Par le **théorème d'unicité de Cauchy-Lipschitz**, deux trajectoires maximales distinctes ne peuvent pas se croiser dans l'espace des phases. Ainsi, aucune trajectoire démarrant à l'intérieur du quadrant ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$ ne peut atteindre ou traverser les axes $u = 0$ ou $v = 0$.

Le quadrant ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$ (ainsi que son adhérence $\mathbb{R}_+^2$) est donc **strictement invariant**.

Points d'équilibre Les points d'équilibre $(\bar{u}, \bar{v})$ sont les solutions du système algébrique $f(u,v) = 0$ et $g(u,v) = 0$. On distingue trois équilibres :

1. **Extinction totale :** $E_0 = (0,0)$.
2. **Absence de prédateurs :** $E_1 = (K, 0)$. Les proies atteignent leur capacité de charge.
3. **Coexistence (équilibre endémique) :** En supposant $\bar{u} \neq 0$ et $\bar{v} \neq 0$, la seconde équation impose $\bar{u} = \dfrac{r}{b}$. En substituant dans la première, on obtient :

$$E_2 = \left(\frac{r}{b}, \frac{1}{a}\left(1 - \frac{r}{bK}\right) \right)$$

Pour que cet équilibre appartienne au quadrant positif ($\bar{v} > 0$), il faut et il suffit que :

$$K > \frac{r}{b} \qquad \text{(Condition de coexistence)}$$

Étude de la stabilité locale La matrice jacobienne $J(u,v)$ du système en un point quelconque est donnée par :

$$J(u,v) = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{2u}{K} - av & -au \\ bv & -r + bu \end{pmatrix}$$

Premier cas : $K < \dfrac{r}{b}$ (Ressources insuffisantes) Dans ce scénario, l'équilibre de coexistence E_2 n'existe pas dans le quadrant positif.

— **En $E_0(0,0)$:** $J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1 > 0$ et $\lambda_2 = -r < 0$. C'est un **point-col** (instable).

— **En $E_1(K,0)$:** $J(K,0) = \begin{pmatrix} -1 & -aK \\ 0 & -r + bK \end{pmatrix}$. C'est une matrice triangulaire supérieure. Ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux : $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -r + bK$. Puisque $K < \dfrac{r}{b}$, on a $\lambda_2 < 0$. Les deux valeurs propres sont strictement négatives : E_1 **est un nœud asymptotiquement stable**.

Interprétation biologique : Les prédateurs s'éteignent par manque de nourriture, et la population de proies se stabilise à sa capacité maximale K.

Deuxième cas : $K > \dfrac{r}{b}$ (Scénario de coexistence)

— **En $E_1(K,0)$:** La valeur propre $\lambda_2 = -r + bK$ devient strictement positive. E_1 perd sa stabilité et devient un **point-col**.

— **En $E_2(\bar{u}, \bar{v})$:** En évaluant la jacobienne au point de coexistence, on obtient :

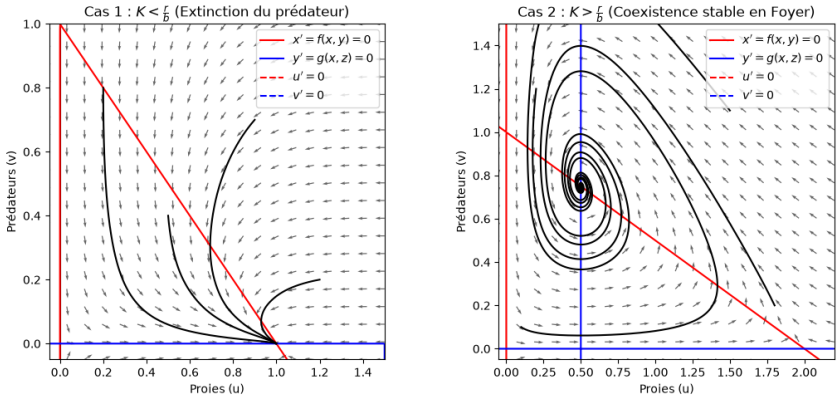
$$J(E_2) = \begin{pmatrix} -\dfrac{r}{bK} & -\dfrac{ar}{b} \\ b\bar{v} & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons la trace (Tr) et le déterminant (Det) de $J(E_2)$:

$$\mathrm{Tr}(J(E_2)) = -\frac{r}{bK} < 0$$
$$\mathrm{Det}(J(E_2)) = ar\bar{v} > 0 \quad (\text{car } \bar{v} > 0)$$

Le déterminant étant strictement positif et la trace strictement négative, les valeurs propres de $J(E_2)$ ont toutes leurs parties réelles strictement négatives. **L'équilibre de coexistence E_2 est donc localement asymptotiquement stable**.

Conclusion Contrairement au modèle classique de Lotka-Volterra qui présente des oscillations neutres (cycles conservatifs), l'introduction d'un terme logistique pour la proie agit comme un **stabilisateur efficace**. Si la capacité de charge K est suffisante, le système amortit les fluctuations et converge vers l'état d'équilibre stationnaire E_2 (sous forme de nœud ou de foyer/spirale).



Exercice 23. En fait, le taux de prédatation n'est pas linéaire en le nombre de proie, il y a un seuil maximal au nombre de proie pouvant être exploitées par chaque prédateur.
Le modèle proie prédateur le plus utilisé s'écrit ainsi de la manière suivante :

$$\begin{cases} u' = u(1-u/K) - vf(u) \\ v' = -rv + \alpha f(u) \end{cases}$$

où $u(t)$ et $v(t)$ décrivent la population de la proie et du prédateur respectivement et où K, α et r sont des constantes strictement positives et où $f(u) = \frac{au}{1+bu}$ ($a > 0$ et $b \geq 0$) est la fonction de consommation. Etudier la dynamique de ce système dans le quadrant $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$ en fonction des différents paramètres.

Correction.

1. **Invariance et positivité des solutions :** L'étude du champ de vecteurs sur les frontières de l'espace des phases montre que :
   — Sur l'axe $u = 0$ (absence de proies), le système se réduit à $v' = -rv$. L'axe vertical est donc un ensemble invariant composé du point fixe $(0, 0)$ et des deux demi-axes ouverts $\{0\} \times \mathbb{R}_+^*$ et $\{0\} \times \mathbb{R}_-^*$.
   — Sur l'axe $v = 0$ (absence de prédateurs), le système devient l'équation logistique $u' = u(1 - u/K)$. L'axe horizontal est également un ensemble invariant, réunion de trajectoires séparées par les points d'équilibre $(0, 0)$ et $(K, 0)$.
   Le champ de vecteurs étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^2$, le théorème d'unicité de Cauchy-Lipschitz garantit que deux trajectoires maximales distinctes ne peuvent pas se croiser. Aucune trajectoire initiée à l'intérieur du quadrant ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$ ne peut donc atteindre ou traverser ces axes. Le quadrant positif $\mathbb{R}_+^2$ est strictement invariant et les solutions restent positives.
2. **Points d'équilibre :** Les points fixes $(\bar{u}, \bar{v})$ annulant simultanément les deux dérivées sont :
   — L'extinction totale : $E_0 = (0, 0)$.
   — L'absence de prédateurs : $E_1 = (K, 0)$, où les proies atteignent leur capacité de charge.
   — La coexistence (équilibre endémique) : pour $\bar{v} \neq 0$, la seconde équation impose $\alpha f(\bar{u}) = r$, soit une abscisse unique :
   $$\bar{u} = \frac{r}{a\alpha - br}$$
   Cet équilibre n'a de sens biologique ($\bar{u} > 0$) que si $a\alpha > br$. En substituant dans la première équation, on obtient l'ordonnée correspondante :
   $$\bar{v} = \frac{\bar{u}\left(1 - \frac{\bar{u}}{K}\right)}{f(\bar{u})} = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{\bar{u}}{K}\right)(1 + b\bar{u})$$
   L'équilibre de coexistence $E_2(\bar{u}, \bar{v})$ existe dans le quadrant positif ($\bar{v} > 0$) si et seulement si $\bar{u} < K$.
3. **Analyse de la dynamique et bifurcation de Hopf :** En évaluant la matrice jacobienne du système en $E_2(\bar{u}, \bar{v})$, on obtient :
   $$J(E_2) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2\bar{u}}{K} - \frac{a\bar{v}}{(1+b\bar{u})^2} & -\frac{r}{\alpha} \\ \frac{\alpha a\bar{v}}{(1+b\bar{u})^2} & 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant $\mathrm{Det}(J(E_2)) = \dfrac{ar\bar{v}}{(1+b\bar{u})^2}$ est toujours strictement positif lorsque E_2 existe ($\bar{v} > 0$). La stabilité locale dépend donc uniquement du signe de la trace, qui après simplification vaut :

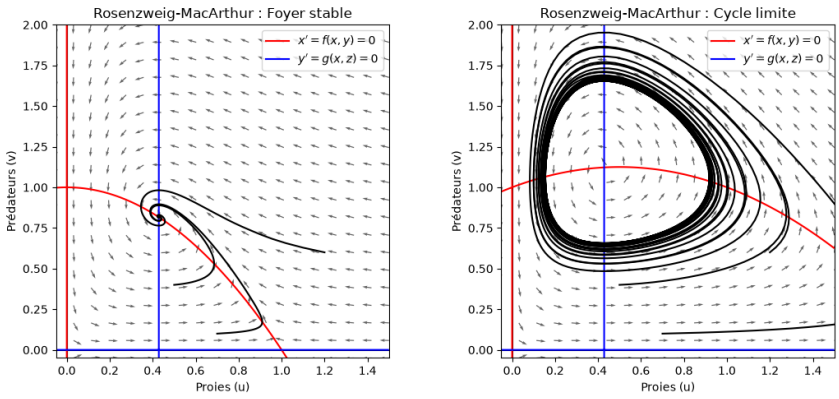
$$\mathrm{Tr}(J(E_2)) = \frac{\bar{u}}{K(1+b\bar{u})}\,(bK - 1 - 2b\bar{u})$$

Géométriquement, la trace s'annule lorsque la droite verticale $u = \bar{u}$ passe exactement par le sommet de la parabole d'isocline des proies $v = \frac{1}{a}(1-u/K)(1+bu)$, soit pour $K_{\mathrm{Hopf}} = 2\bar{u} + \dfrac{1}{b}$. On distingue ainsi trois régimes dynamiques selon la capacité de charge K (en supposant $a\alpha > br$) :

— **Si** $K < \bar{u}$ **:** l'équilibre de coexistence E_2 n'existe pas dans $\mathbb{R}^2_+$. L'équilibre $E_1(K,0)$ est un nœud globalement asymptotiquement stable : les prédateurs s'éteignent par manque de proies.

— **Si** $\bar{u} < K < 2\bar{u} + \dfrac{1}{b}$ **:** on a $\mathrm{Tr}(J(E_2)) < 0$ et $\mathrm{Det}(J(E_2)) > 0$. L'équilibre de coexistence E_2 est localement asymptotiquement stable (nœud ou foyer stable). Les populations convergent vers cet état stationnaire.

— **Si** $K > 2\bar{u} + \dfrac{1}{b}$ **:** la trace devient strictement positive ($\mathrm{Tr}(J(E_2)) > 0$). L'équilibre E_2 perd sa stabilité au profit d'un **cycle limite stable** par une bifurcation de Hopf supercritique (phénomène appelé *paradoxe de l'enrichissement*). Les populations se mettent alors à osciller périodiquement.



Exercice 24. [Modèle de Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov] Le modèle de FKPP décrit l'évolution dans le temps $t > 0$ et dans l'espace $x \in \mathbb{R}$ de la concentration d'une espèce $u(t,x)$. Ce modèle est donné par une équation aux dérivées partielles (EDP) :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = ru(x,t)(1-u(x,t)) + d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t).$$

Le terme $d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ décrit le déplacement de u dans l'espace via un processus de diffusion. Certaines solutions de cette équations sont des profils $U(\xi)$ fixés se déplaçant à une vitesse $c > 0$ dans l'espace. Ceci s'écrit mathématiquement

$$u(x,t) = U(x - ct).$$

On montre facilement qu'un tel profil vérifie l'équation différentielle

$$dU'' + cU' + rU(1-U) = 0. \tag{4}$$

Le but de l'exercice est de déterminer des condition nécéssaire pour que U soit une onde de propagation vérifiant $U(-\infty) = 0$ et $U(+\infty) = 1$.
1 - On pose $d = r = 1$. Calculer les solutions stationnaire positives ou nulles de (4) et étudier leurs stabilité en fonction de c. (On pourra s'inspirer de l'exercice 20). 2- Toujours pour $d = r = 1$, en déduire les valeurs de c pour lesquelles un profile $U \geq 0$ vérifiant $U(-\infty) = 0$ et $U(+\infty) = 1$ peut exister.
3- Généraliser l'étude pour d et r quelconques.

Correction.

1. **Recherche des solutions stationnaires et étude de leur stabilité ($d = r = 1$)**

Lorsque $d = r = 1$, l'équation différentielle (4) s'écrit :

$$U'' + cU' + U(1-U) = 0. \tag{5}$$

Pour étudier ce système, on se ramène à un système différentiel du premier ordre dans le plan des phases en posant $V = U'$. L'équation (5) est équivalente au système autonome suivant :

$$\begin{cases} U' = V \\ V' = -cV - U(1-U) \end{cases} \iff \begin{pmatrix} U' \\ V' \end{pmatrix} = F(U,V), \tag{6}$$

où $F(U,V) = \big(V, -cV - U(1-U)\big)$.

Solutions stationnaires : Les points d'équilibre (U^*, V^*) du système vérifient $F(U^*, V^*) = (0,0)$, soit :

$$\begin{cases} V^* = 0 \\ -U^*(1-U^*) = 0 \end{cases} \iff (U^*, V^*) \in \{(0,0), (1,0)\}.$$

Les deux solutions stationnaires (constantes) positives ou nulles sont donc $U \equiv 0$ et $U \equiv 1$.

Étude de la stabilité : La matrice jacobienne de F en un point (U,V) est donnée par :

$$J_F(U,V) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2U-1 & -c \end{pmatrix}.$$

— **Au point d'équilibre** $(0,0)$ **:** La matrice jacobienne vaut :

$$J_F(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -c \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est $P_0(\lambda) = \lambda^2 + c\lambda + 1$. Le discriminant vaut $\Delta = c^2 - 4$. Comme $c > 0$, plusieurs cas se présentent :

- Si $0 < c < 2$ ($\Delta < 0$) : les valeurs propres sont complexes conjuguées à partie réelle strictement négative, $\lambda_\pm = \frac{-c \pm i\sqrt{4-c^2}}{2}$. Le point $(0,0)$ est un **foyer stable** (asymptotiquement stable).
- Si $c = 2$ ($\Delta = 0$) : il y a une valeur propre double strictement négative $\lambda = -1$. Le point $(0,0)$ est un **nœud impropre stable**.
- Si $c > 2$ ($\Delta > 0$) : il y a deux valeurs propres réelles distinctes strictement négatives, $\lambda_\pm = \frac{-c \pm \sqrt{c^2-4}}{2} < 0$. Le point $(0,0)$ est un **nœud propre stable**.

Dans tous les cas (pour tout $c > 0$), l'équilibre $(0,0)$ est **asymptotiquement stable**.

— **Au point d'équilibre** $(1,0)$ **:** La matrice jacobienne vaut :

$$J_F(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est $\det(J_F(1,0)) = -1 < 0$. Les deux valeurs propres sont réelles et de signes opposés ($\lambda_\pm = \frac{-c \pm \sqrt{c^2+4}}{2}$). Le point $(1,0)$ est donc un **point selle** (ou col) : il est **instable** pour tout $c > 0$.

2. **Condition nécessaire d'existence du profil d'onde** ($d = r = 1$)

Un profil d'onde progressif $U(\xi)$ vérifiant $U(-\infty) = 0$ et $U(+\infty) = 1$ correspond, dans le plan des phases (U,V), à une trajectoire hétérocline partant du point $(0,0)$ en $\xi \to -\infty$ et arrivant au point $(1,0)$ en $\xi \to +\infty$ (le long de la variété stable de $(1,0)$).

De plus, l'énoncé impose la condition biologique de positivité $U(\xi) \geq 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Or, d'après la question précédente :

- Si $0 < c < 2$, le point $(0,0)$ est un foyer stable. En inversant le sens du temps ($\xi \to -\infty$), les trajectoires s'enroulent en spirale autour de l'origine $(0,0)$. Par conséquent, la composante $U(\xi)$ oscille autour de 0 et prend nécessairement des valeurs strictement négatives au voisinage de $-\infty$, ce qui contredit la condition $U \geq 0$.
- Si $c \geq 2$, le point $(0,0)$ est un nœud (les valeurs propres sont réelles négatives). Les trajectoires quittant $(0,0)$ en $\xi \to -\infty$ le font de manière monotone sans osciller, ce qui permet à $U(\xi)$ de rester positive.

Conclusion : Une condition nécessaire pour qu'un tel profil existe est que la vitesse de propagation vérifie :

$$c \geq 2.$$

3. **Généralisation pour $d > 0$ et $r > 0$ quelconques**

On considère maintenant l'équation générale (4) :

$$dU'' + cU' + rU(1-U) = 0.$$

On peut soit refaire l'étude complète du système, soit procéder par un changement d'échelle (adimensionnement) pour se ramener au cas précédent.

Méthode par changement d'échelle : Posons $\tilde{U}(\eta) = U(\alpha\eta)$ où $\alpha > 0$ est une constante à déterminer. On a alors $U'(\xi) = \frac{1}{\alpha}\tilde{U}'(\eta)$ et $U''(\xi) = \frac{1}{\alpha^2}\tilde{U}''(\eta)$ avec $\eta = \xi/\alpha$. En substituant dans (4), on obtient :

$$\frac{d}{\alpha^2}\tilde{U}'' + \frac{c}{\alpha}\tilde{U}' + r\tilde{U}(1-\tilde{U}) = 0.$$

En divisant toute l'équation par $r > 0$, il vient :

$$\frac{d}{r\alpha^2}\tilde{U}'' + \frac{c}{r\alpha}\tilde{U}' + \tilde{U}(1-\tilde{U}) = 0.$$

On choisit $\alpha = \sqrt{\frac{d}{r}}$ afin que le coefficient devant $\tilde{U}''$ soit égal à 1. L'équation devient alors :

$$\tilde{U}'' + \tilde{c}\tilde{U}' + \tilde{U}(1-\tilde{U}) = 0, \quad \text{avec } \tilde{c} = \frac{c}{r\sqrt{d/r}} = \frac{c}{\sqrt{rd}}.$$

Les conditions aux limites $\tilde{U}(-\infty) = 0$, $\tilde{U}(+\infty) = 1$ et $\tilde{U} \geq 0$ étant invariantes par ce changement d'échelle positif, on retrouve exactement le problème de la question 1 avec la vitesse réduite $\tilde{c}$.

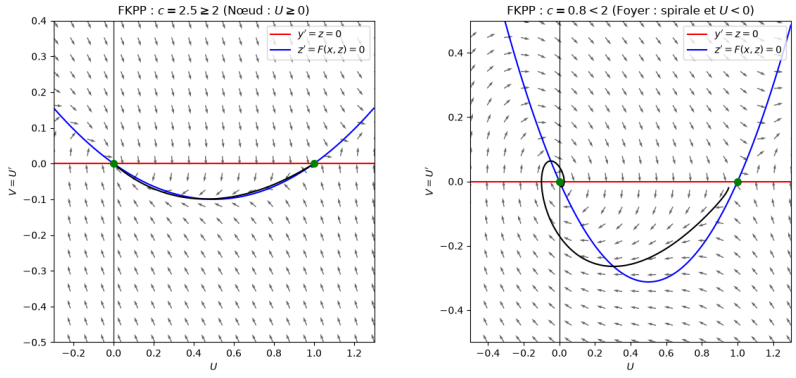
Conclusion générale :

— Les solutions stationnaires sont toujours $U \equiv 0$ (asymptotiquement stable) et $U \equiv 1$ (point selle instable).

— L'équilibre $(0,0)$ est un nœud (pas d'oscillations négatives) si et seulement si $\tilde{c} \geq 2$, ce qui équivaut à :

$$\frac{c}{\sqrt{rd}} \geq 2 \iff c \geq 2\sqrt{rd}.$$

La vitesse minimale de propagation de l'onde est donc $c_{\min} = 2\sqrt{rd}$.



Exercice 25. [Le Modèle de croissance cyclique de Goodwin] Le modèle de croissance cyclique de Goodwin correspond à l'évolution au cours du temps du marché de l'emploi et des parts de salaires dans le revenu national d'une économie. On note respectivement $x(t)$, et $y(t)$ le taux de demande d'emploi et la part des salaires dans le revenu national au temps t. Ces deux quantités peuvent être déterminées en fonction de cinq paramètres économiques : Le stock de capital $K(t)$, la production $Y(t)$, l'emploi courant $L(t)$, l'offre de travail $N(t)$, et enfin le taux de salaire réel $w(t)$. En supposant que la demande de travail est déterminée par le plein emploi du capital, nous avons $x(t) = L(t)/N(t)$ et $y(t) = w(t)L(t)/Y(t)$ Nous conviendrons par la suite que les taux de variation de l'emploi et des salaires sont de la forme suivante

$$N'(t) = \nu N(t), \quad L'(t) = L(t)\left(-\beta + \frac{K'(t)}{K(t)}\right) \text{ et } w'(t) = (px(t) - \gamma)\, w(t).$$

On suppose de plus que le capital est proportionnel à la production et que l'investissement K' est égal au profits :

$$K(t) = \frac{1}{h}Y(t), \qquad K'(t) = Y(t) - w(t)L(t)$$

Enfin, on suppose que tous les paramètres sont positifs ainsi que $h > \beta + \nu$.

1 - Montrer que $x(t)$ et $y(t)$ vérifient le système

$$\begin{cases} x' = ax - byx \\ y' = -cy + dxy \end{cases}$$

où a, b, c et d sont des constantes positives à déterminer.

2 - Étudier les points stationnaires de ce système et leurs natures.

3 - Étudier la dynamique globale de ce système.

4 - Pensez vous que ce système est robuste ?

Que se passe-t-il par exemple si on remplace l'équation de L' par

$$L' = \alpha L(-\beta + K'/K)$$

pour un certain $\alpha > 0$?

Correction.

1. **Dérivation du système différentiel de Lotka-Volterra**

   On cherche à exprimer les dérivées logarithmiques $\frac{x'}{x}$ et $\frac{y'}{y}$ à partir des relations économiques fournies.

   Calcul de $x'(t)$: Par définition, $x(t) = \frac{L(t)}{N(t)}$. En prenant la dérivée logarithmique (pour $L, N > 0$), on obtient :

   $$\frac{x'}{x} = \frac{L'}{L} - \frac{N'}{N}.$$

   D'après l'énoncé, $\frac{N'}{N} = \nu$ et $\frac{L'}{L} = -\beta + \frac{K'}{K}$. Or, en utilisant $K = \frac{1}{h}Y$ et $K' = Y - wL$, on a :

   $$\frac{K'}{K} = \frac{Y - wL}{Y/h} = h\left(1 - \frac{wL}{Y}\right) = h(1 - y).$$

   En substituant ces expressions, il vient :

   $$\frac{x'}{x} = -\beta + h(1 - y) - \nu = (h - \beta - \nu) - hy.$$

   En multipliant par x, on obtient :

   $$x' = (h - \beta - \nu)x - hxy.$$

   Calcul de $y'(t)$: Par définition, $y(t) = \frac{w(t)L(t)}{Y(t)}$. La dérivée logarithmique donne :

   $$\frac{y'}{y} = \frac{w'}{w} + \frac{L'}{L} - \frac{Y'}{Y}.$$

   Or, comme $K(t) = \frac{1}{h}Y(t)$ avec h constant, on a $\frac{Y'}{Y} = \frac{K'}{K}$. Ainsi, les termes $\frac{K'}{K}$ dans $\frac{L'}{L}$ et $-\frac{Y'}{Y}$ s'annulent :

   $$\frac{y'}{y} = (px - \gamma) + \left(-\beta + \frac{K'}{K}\right) - \frac{K'}{K} = -(\gamma + \beta) + px.$$

   En multipliant par y, on obtient :

   $$y' = -(\gamma + \beta)y + pxy.$$

   Identification des constantes : Le couple (x, y) vérifie donc bien le système de Lotka-Volterra :

   $$\begin{cases} x' = ax - byx \\ y' = -cy + dxy \end{cases}$$

   avec les constantes :

   $$a = h - \beta - \nu, \qquad b = h, \qquad c = \gamma + \beta, \qquad d = p.$$

   Comme tous les paramètres sont strictement positifs et que $h > \beta + \nu$, les quatre constantes a, b, c, d sont bien **strictement positives**.

2. **Étude des points stationnaires et de leur nature**

On note $F(x,y) = \big(x(a-by),\, y(-c+dx)\big)$. Les points d'équilibre vérifient $F(x^*,y^*) = (0,0)$:

$$\begin{cases} x^*(a-by^*) = 0 \\ y^*(-c+dx^*) = 0 \end{cases} \iff (x^*,y^*) \in \left\{(0,0),\ \left(\frac{c}{d},\frac{a}{b}\right)\right\}.$$

Il existe donc deux points stationnaires dans le quadrant positif $\mathbb{R}_+^2$: l'équilibre trivial $E_0 = (0,0)$ et l'équilibre intérieur non trivial $E_1 = \left(\frac{c}{d},\frac{a}{b}\right)$.

La matrice jacobienne du système en un point (x,y) est :

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} a-by & -bx \\ dy & -c+dx \end{pmatrix}.$$

— **Nature de $E_0 = (0,0)$:** La matrice jacobienne vaut :

$$J_F(0,0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = a > 0$ et $\lambda_2 = -c < 0$. Elles sont réelles et de signes opposés : E_0 est un **point selle** (instable).

— **Nature de $E_1 = \left(\frac{c}{d},\frac{a}{b}\right)$:** La matrice jacobienne vaut :

$$J_F(E_1) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \lambda^2 + ac = 0$. Les valeurs propres sont imaginaires pures conjuguées :

$$\lambda_\pm = \pm i\sqrt{ac}.$$

Pour le système linéarisé, E_1 est un **centre**. Comme la partie réelle des valeurs propres est nulle, la linéarisation ne suffit pas à conclure directement pour le système non linéaire (cas hyperbolique non vérifié) ; l'étude globale à la question suivante permettra de confirmer qu'il s'agit bien d'un centre non linéaire (stable au sens de Lyapunov, mais non asymptotiquement stable).

3. **Dynamique globale du système**

On se place dans le quadrant ouvert strictement positif $\Omega =]0,+\infty[^2$, qui est invariant par le flot (les axes $x=0$ et $y=0$ sont des trajectoires invariantes).

Recherche d'une intégrale première : Dans Ω, en divisant les deux équations du système, on peut éliminer le temps t :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-c+dx)}{x(a-by)} \iff \left(\frac{a}{y}-b\right)dy = \left(-\frac{c}{x}+d\right)dx.$$

En intégrant chaque membre par rapport à sa variable, on obtient que la fonction $H : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par :

$$H(x,y) = dx - c\ln(x) + by - a\ln(y)$$

est une **intégrale première** du système (c'est-à-dire que $\frac{d}{dt}H(x(t),y(t)) = 0$ le long de toute solution).

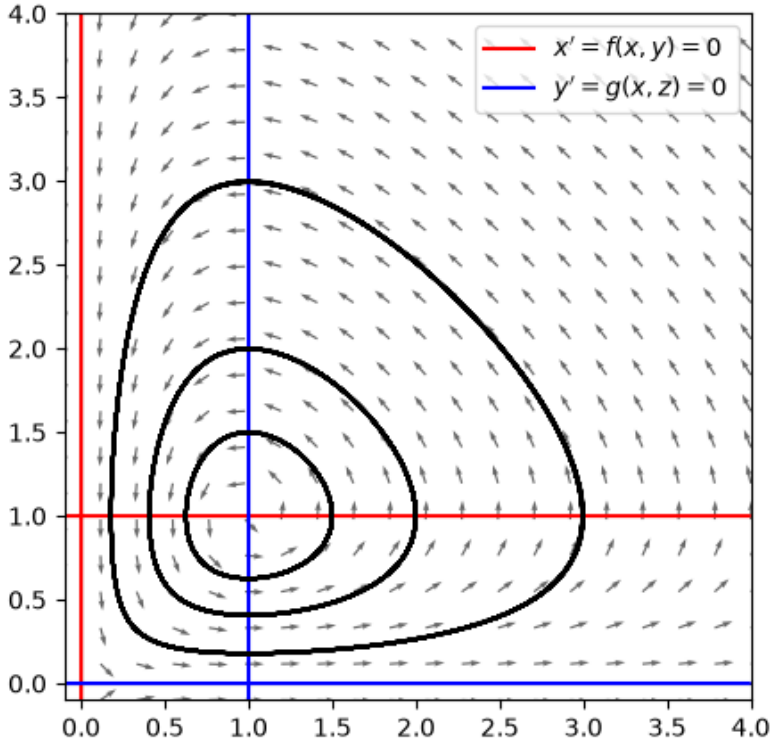
Allure des trajectoires : La fonction H est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et s'écrit $H(x,y) = f(x) + g(y)$ avec $f(x) = dx - c\ln(x)$ et $g(y) = by - a\ln(y)$.

— f est strictement convexe sur $]0,+\infty[$, tend vers $+\infty$ en 0^+ et en $+\infty$, et atteint son unique minimum global en $x^* = \frac{c}{d}$.

— g est strictement convexe sur $]0,+\infty[$, tend vers $+\infty$ en 0^+ et en $+\infty$, et atteint son unique minimum global en $y^* = \frac{a}{b}$.

Par conséquent, H est strictement convexe, coercive ($\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty \text{ ou } \partial\Omega} H(x,y) = +\infty$), et admet un unique minimum global strict en $E_1 = \left(\frac{c}{d},\frac{a}{b}\right)$.

Les courbes de niveau $\mathcal{C}_k = \{(x,y) \in \Omega \mid H(x,y) = k\}$ pour $k > H(E_1)$ sont donc des courbes fermées simples entourant E_1. Comme E_1 est le seul point critique dans Ω, toutes les trajectoires issues d'un point initial $(x_0,y_0) \in \Omega \setminus \{E_1\}$ sont des **orbites périodiques** tournant autour de E_1 dans le sens trigonométrique (en effet, pour $x > c/d$ et $y = a/b$, on a $x' = 0$ et $y' > 0$). L'équilibre E_1 est donc un **centre global** dans Ω : l'économie connaît des cycles perpétuels d'emploi et de répartition des richesses.



4. **Robustesse du modèle et modification de l'équation de L'**

Robustesse structurelle : Ce système **n'est pas structurellement robuste**. En effet, l'existence d'une famille continue d'orbites périodiques (un centre) repose sur la présence exacte de l'intégrale première $H(x, y)$, ce qui correspond à des valeurs propres imaginaires pures $\pm i\sqrt{ac}$ (système non hyperbolique). La moindre perturbation du modèle (comme l'ajout d'un terme d'amortissement, d'une saturation logistique ou d'une élasticité différente) brise la conservation de H et transforme généralement le centre en un foyer stable (amortissement des cycles) ou un foyer instable (explosion des oscillations).

Effet du paramètre $\alpha > 0$: Si l'on remplace l'équation de L' par $L' = \alpha L\left(-\beta + \frac{K'}{K}\right)$ avec $\alpha > 0$, les nouvelles équations deviennent :

$$\frac{x'}{x} = \alpha\big(-\beta + h(1-y)\big) - \nu = \big(\alpha(h-\beta) - \nu\big) - \alpha h y,$$

$$\frac{y'}{y} = (px - \gamma) + \alpha\left(-\beta + \frac{K'}{K}\right) - \frac{K'}{K} = -(\gamma + \alpha\beta) + px + (\alpha - 1)h(1-y).$$

En développant, on obtient le nouveau système perturbé :

$$\begin{cases} x' = \tilde{a}x - \tilde{b}xy \\ y' = -\tilde{c}y + dxy - (\alpha - 1)hy^2 \end{cases}$$

avec $\tilde{a} = \alpha(h-\beta) - \nu$, $\tilde{b} = \alpha h$ et $\tilde{c} = \gamma + \alpha\beta$ (en supposant $\tilde{a} > 0$). L'apparition du terme quadratique $-(\alpha - 1)hy^2$ dans la seconde équation brise la symétrie de Lotka-Volterra :

- **Si $\alpha = 1$:** On retrouve le modèle initial conservatif (centre).
- **Si $\alpha > 1$:** Le terme $-(\alpha - 1)hy^2$ est négatif et agit comme un frein logistique (auto-limitation) sur la part des salaires y. En calculant la dérivée de l'intégrale première associée $\tilde{H}$ (ou via la trace de la jacobienne à l'équilibre intérieur, qui devient négative : $\mathrm{Tr}(J) = -(\alpha - 1)hy^* < 0$), on montre que l'équilibre intérieur devient un **foyer asymptotiquement stable** (ou un nœud stable). Les cycles économiques s'amortissent vers un état stationnaire.
- **Si $0 < \alpha < 1$:** Le terme $-(\alpha - 1)hy^2$ est positif (effet déstabilisant). La trace de la jacobienne à l'équilibre intérieur devient strictement positive ($\mathrm{Tr}(J) > 0$) : l'équilibre intérieur devient un **foyer instable** (répulsif). Les trajectoires s'enroulent en spirale vers l'extérieur et finissent par sortir de la zone économiquement viable ($y > 1$, c'est-à-dire des salaires dépassant la production totale).

Exercice 26. [Modèle de croissance néoclassique] On s'intéresse au modèle

$$\begin{cases} k' = f(k) - c - (\delta + n)k \\ U''(c)c' = U'(c)[\rho + \delta - f'(k)] \end{cases}$$

où $k(t)$ décrit le ratio capital/travail au temps t, $c(t)$ est la consomation par personne au temps t, δ, n, ρ et δ sont des constantes positives et où,par exemple, $f(k) = k(\mu - k)$ $(\mu > 0)$ décrit la fonction de production et $U(c)$ est la fonction d'utilité que l'on suppose croissante, concave et telle que $U(0) = 0$.
(La dérivation de ce modèle, utilisant des techniques d'optimisation dynamique, est décrites dans le livre "Mathematics for Economics" de Hoy-Livernois-McKenna-Rees-Stengos p 893).
1- Décrire graphiquement la dynamique de ce modèle.
2- Déterminer graphiquement une stratégie de consommation $c(t)$ conduisant à l'équilibre non trivial du modèle.
(Ceci correspond à une trajectoires reliant l'équilibre $(k, c) = (0, 0)$ à un équilibre positif (k^*, c^*)).

Correction.

1. **Description graphique de la dynamique du modèle (Diagramme de phase)**
   Par hypothèse économique, la fonction d'utilité U est strictement croissante $(U'(c) > 0)$ et strictement concave $(U''(c) < 0)$ pour $c > 0$. On peut donc diviser la seconde équation par $U''(c) < 0$, ce qui permet de réécrire le système sous la forme :

$$\begin{cases} k' = f(k) - c - (\delta + n)k \\ c' = -\dfrac{U'(c)}{U''(c)}\big[f'(k) - (\rho + \delta)\big] \end{cases}$$

   On note $\sigma(c) = -\frac{U'(c)}{U''(c)} > 0$ (l'inverse de l'aversion absolue pour le risque). Avec l'exemple $f(k) = k(\mu - k) = \mu k - k^2$, on a $f'(k) = \mu - 2k$ (on suppose $\mu > \rho + \delta$ afin qu'un équilibre non trivial existe).

   1. Étude des isoclines nulles :
   — **Isocline** $k' = 0$ **:**

$$k' = 0 \iff c = f(k) - (\delta + n)k = k\big(\mu - \delta - n - k\big).$$

   Dans le plan (k, c) (avec $k \geq 0, c \geq 0$), cette courbe est une parabole tournée vers le bas qui s'annule en $k = 0$ et en $k_{\max} = \mu - \delta - n$. Elle atteint son maximum (la « règle d'or ») en $k_{\text{or}} = \frac{\mu - \delta - n}{2}$.
   — Au-dessous de cette courbe $(c < f(k) - (\delta + n)k)$, on a $k' > 0$: le capital augmente (flèches vers la droite $\rightarrow$).
   — Au-dessus de cette courbe $(c > f(k) - (\delta + n)k)$, on a $k' < 0$: le capital diminue (flèches vers la gauche $\leftarrow$).
   — **Isocline** $c' = 0$ **:** Comme $\sigma(c) > 0$ pour $c > 0$, on a :

$$c' = 0 \iff f'(k) = \rho + \delta \iff \mu - 2k = \rho + \delta \iff k = k^* = \frac{\mu - \rho - \delta}{2}.$$

   (Note : la droite $c = 0$ est également invariante si l'on prolonge $\sigma(0) = 0$). Dans le quadrant positif, l'isocline $c' = 0$ est donc la **droite verticale** d'équation $k = k^*$. Comme $\rho > 0$ et $n > 0$ (en général $\rho > n$), on observe que $k^* < k_{\text{or}}$ (l'équilibre se situe à gauche du sommet de la parabole).
   — À gauche de la droite $(k < k^*)$, on a $f'(k) > \rho + \delta$, donc $c' > 0$: la consommation augmente (flèches vers le haut $\uparrow$).
   — À droite de la droite $(k > k^*)$, on a $f'(k) < \rho + \delta$, donc $c' < 0$: la consommation diminue (flèches vers le bas $\downarrow$).

   2. Points d'équilibre et nature : L'intersection des deux isoclines donne deux points stationnaires économiquement pertinents :
   — L'équilibre trivial $E_0 = (0, 0)$ (et éventuellement $(k_{\max}, 0)$ sur l'axe $c = 0$).
   — L'équilibre intérieur non trivial $E^* = (k^*, c^*)$, où $k^* = \frac{\mu - \rho - \delta}{2}$ et $c^* = f(k^*) - (\delta + n)k^*$.
   En calculant la matrice jacobienne en E^*, on obtient :

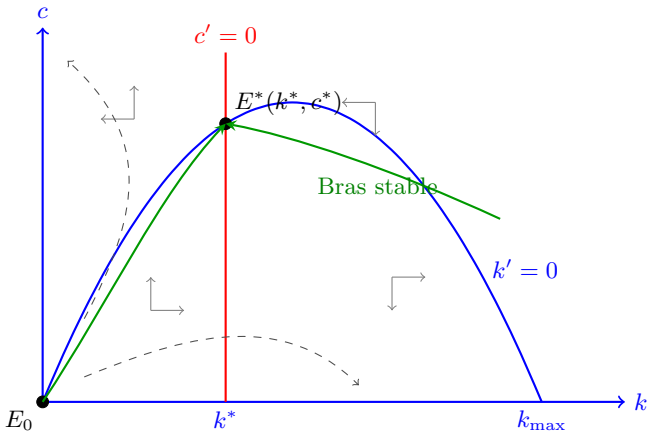
$$J(k^*, c^*) = \begin{pmatrix} f'(k^*) - (\delta + n) & -1 \\ -\sigma(c^*)f''(k^*) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho - n & -1 \\ 2\sigma(c^*) & 0 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant vaut $\det J(k^*, c^*) = 2\sigma(c^*) > 0$? Attention au signe :

$$\det J(k^*, c^*) = 0 - (-1)\big(-\sigma(c^*)f''(k^*)\big) = \sigma(c^*)f''(k^*) = -2\sigma(c^*) < 0.$$

Comme le déterminant est strictement négatif, les deux valeurs propres sont réelles et de signes opposés : l'équilibre $E^* = (k^*, c^*)$ est un **point selle** (ou col).

3. Représentation graphique (Diagramme de phase) :



2. **Stratégie de consommation conduisant à l'équilibre non trivial**

Comme $E^*(k^*, c^*)$ est un **point selle**, il existe une unique courbe invariante (la **variété stable** ou *bras stable*, tracée en vert sur le diagramme) le long de laquelle les trajectoires convergent asymptotiquement vers (k^*, c^*) lorsque $t \to +\infty$.

Détermination graphique de la stratégie : Dans la région située sous la parabole $k' = 0$ et à gauche de la droite $k = k^*$ (région IV), le champ de vecteurs pointe vers le haut et la droite ($k' > 0$ et $c' > 0$). La branche gauche du bras stable prend naissance à l'origine $E_0 = (0, 0)$ et monte de façon strictement croissante vers $E^*(k^*, c^*)$ en restant toujours située sous la parabole $k' = 0$.

Interprétation économique :

- Étant donné un stock de capital initial $k_0 \in]0, k^*[$ (une économie en voie de développement), il existe un **unique niveau de consommation initial optimal** $c_0 = \phi(k_0)$ situé exactement sur ce bras stable.
- La stratégie consiste alors à faire croître simultanément le capital $k(t)$ et la consommation $c(t)$ de manière monotone le long de cette trajectoire hétérocline jusqu'à atteindre l'état stationnaire (k^*, c^*) en $t \to +\infty$.
- **Conséquence d'une mauvaise initialisation :**
  - Si la consommation initiale est trop élevée ($c(0) > \phi(k_0)$), l'investissement est insuffisant : la trajectoire finit par franchir la parabole $k' = 0$, le capital s'effondre ($k(t) \to 0$) tandis que la consommation diverge (économie non viable).
  - Si la consommation initiale est trop faible ($c(0) < \phi(k_0)$), il y a sur-accumulation de capital : la trajectoire franchit la droite $k = k^*$, la consommation s'effondre ($c(t) \to 0$) et l'économie converge vers l'équilibre sous-optimal $(k_{\max}, 0)$ où toute la production sert uniquement à compenser la dépréciation du capital.