Feuille d'exercices en mathématiques pour l'économiste 5

L3 économie
1er semestre 2025-2026

Organisation du cours

Chapitre 1. Généralités et dimension 1

Cours 1 : Exemples généraux et formalisme.

Cours 2 : Théorème de Cauchy Lipschitz. Champs de vecteurs (autonome et non autonome).

Cours 3 : Cas de la Dimension 1. Représentation graphique du cas autonome en dimension 1. Étude qualitative. TD1.

Chapitre 2. Systèmes linéaires en dimension 2

Cours 4 : Systèmes linéaires généraux (cas diagonalisable y compris complexes). Cartographie des systèmes linéaires en dimension 2. Diagramme de Poincaré.
— Feuille de TD 2.

Cours 5 : 1 octobre CC1 de 1h30 sur les deux premiers chapitres.

Chapitre 3. Systèmes non linéaires en dimension 2

Cours 7 : Systèmes non linéaire en dimension 2, locale. Notion de stabilité.
— Exercices sur le non linéaire (feuille de TD 3).

Cours 8 : Systèmes non linéaire en dimension 2, représentation graphique.
— Exercices sur le non linéaire (feuille de TD 3 suite).

Cours 9 : 5 novembre CC2 de 1h30 sur le non linéaire.

Modalités d'évalutations :

Il y a deux CC obligatoires le 1 octobre et le 5 novembre à 10h15.
La moyenne intermediaire est $MI = 0.5 \times (CC1 + CC2)$.
Une fois cette note connue deux choix s'offrent à vous.

Choix 1 : Si vous le souhaitez MI sera la note finale

$$MF = MI.$$

Choix 2 : Sinon, une seconde chance aura lieu le 26 novembre sur inscription obligatoire. Ce CC3 optionnel portera sur l'ensemble du programme et comptera pour moitier dans la note finale :

$$MF = 0.5 \times (MI + CC3).$$

Il n'y a pas de seconde session.

1 Généralités et dimension 1.

Résolutions explicites

Exercice 1. Soit $\lambda, p \in \mathbb{R}$. Calculer les fonctions (positives) $y(x)$ dont l'élasticité par rapport à x est $E(x) = \lambda x^p$

Exercice 2. On s'intéresse à un produit vendu à un prix $P(t)$ dépendant du temps t. On suppose que la demande $Q_d(t)$ et l'offre $Q_0(t)$ à l'instant t dépendent du prix et de la variation du prix à l'instant t via les équations :

$$Q_d(t) = a - bP(t) - cP'(t)$$

$$Q_0(t) = \alpha + \beta P(t) + \gamma P'(t)$$

où a, b, c, α, β, γ sont des constantes strictement positives.
1) En supposant que le marché est à l'équilibre à tout instant, calculer le prix $P(t)$ en fonction du temps t.
2) Calculer l'état stationnaire moyen du prix.

Exercice 3. Résoudre $y' = y^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Discuter de l'existence en temps long et de l'unicité en fonction de α.

Exercice 4. On s'intéresse au comportement asymptotique des solutions de $y'(t) + 2y(t) = f(t)$ pour plusieurs fonctions f et une condition initiale $y(0) = y_0 > 0$.
1) Résoudre l'équation homogène $y' + 2y = 0$ et calculer la limite de $y(t)$ pour $t \to +\infty$.
2) Résoudre l'équation et calculer la limite pour $f(t) = a \in \mathbb{R}$
3) Résoudre l'équation et calculer la limite pour $f(t) = at + b$
4) Résoudre l'équation et calculer la limite pour $f(t) = ae^{at}$ (on pourra distinguer les cas $a = -2$ et $a \neq -2$).

Problème de cauchy et théorème de Cauchy Lipchitz

Exercice 5. Exprimer tous les exemples du cours comme des systèmes différentielles d'ordre 1.

Exercice 6. Résoudre le problème de cauchy

$$\begin{cases} y' = ay \\ u' = bu + cy \end{cases}$$

avec les conditions initiales $(y(0), u(0) = (y_0, u_0)$.

Champs de vecteurs.

Exercice 7. Tracer le champ de vecteurs dans le plan de phase (y, t) pour les systèmes suivant.

$$y' = ty, \quad y' = y^2 + t^2, \quad y' = y(t - y)$$

$$y' = -t, \quad y' = 3t^2 + 1, \quad y' = y(1 - y), \quad y' = y(1 - y^2).$$

Étude qualitative en dimension 1

Exercice 8. Étudier le comportement qualitatif des systèmes dynamiques $y' = f(y)$ pour les fonctions f suivantes.

1. $f(y) = ay, \quad a \in \mathbb{R}$
2. $f(y) = ay + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$
3. $f(y) = ay^2 + by + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$

Exercice 9. Soit f une fonction régulière.

1. Justifier que la solution maximale $u : I \to \mathbb{R}$ au problème de Cauchy $u' = uf(u)$, $u(0) = u_0 > 0$ vérifie $u(t) > 0 \; \forall t \in I$.
2. Proposer des hypothèses sur f permettant d'assurer que $I = \mathbb{R}$.

Exercice 10. Soit $a < b < c$ trois réels.

1. Etudier l'équation $u' = (u - a)(u - b)(u - c)$.
2. Dans le cas $a = 0$ comparer le résultat avec l'équation $v' = v(c - v)$.

Exercice 11. [Quota de pêche.]
Pour tout temps $t \in \mathbb{R}_+$, on note $u(t)$ la concentration de morue (en centaine par m^3) que l'on trouve dans une zone de pêche. On suppose que $u(0) > 0$.

Une étude [1] a montré que l'évolution naturelle, c'est-à-dire sans activité humaine, de la population de poisson vérifie l'équation différentielle

$$u' = 2u(1 - 0.5u).$$

1. Étudier cette équation.
   On justifiera notamment que $u(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et on étudiera la limite lorsque $t \to +\infty$.
2. Pour prendre en compte la pression de pêche, un nouveau modèle a été proposé.

   $$u' = 2u(1 - 0.5u) - 3/4.$$

   Justifier et étudier ce modèle. (On expliquera notamment pourquoi on ne peut pas l'appliquer naïvement.)
3. Quelle quantitée maximum de pêche peut on imposer sans exterminer la population.
4. Quelle autre modèle (et donc stratégie de gestion) proposez vous ?

Exercice 12. [Modèle néoclassique de la croissance (Robert Solow, 1950s).] Soit t le temps. On n'écrira pas explicitement la variable t dans les fonctions de cet exercice. On note K le capital (qui dépend du temps t), L le travail (qui dépend du temps t) et k le ratio capital-travail : $k(t) = K(t)/L(t)$. On note également y la production par personne et on suppose que

$$y = f(k)$$

où f est une fonction croissante et concave (et C^1 dans le cadre de cet exercice).
On suppose enfin que le travail augmente exponentiellement vite à un taux d'accroissement noté n et que l'augmentation marginale du capital en stock K est proportionnelle à la production $Y = yL$:

$$K' = sY.$$

1. Montrer que l'on obtient l'équation de Solow :

   $$k' = sf(k) - nk.$$

2. Étudier le comportement asymptotique de cette équation pour différentes fonctions f.

1. Étude fictive. La réalité est bien plus complexe.

2 Systémes linéaires en dimension 2.

Exercice 13. Pour les systèmes suivants, préciser la nature de l'origine et dessiner l'allure du plan de phase ainsi que l'allure des trajectoires.

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = -y \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = -3x + 2y \\ y' = -y \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = 3x \\ y' = y + x \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = -x + y \\ y' = x - y \end{cases}$$

Exercice 14. Pour les systèmes suivants, préciser la nature de l'origine et dessiner l'allure du plan de phase ainsi que l'allure des trajectoires.

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -x - y \end{cases}$$

Exercice 15. Pour les systèmes suivants, préciser la nature de l'origine et dessiner l'allure du plan de phase ainsi que l'allure des trajectoires.

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -y \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 2y \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = -x + y \end{cases}$$

Exercice 16. Pour les systèmes suivants, préciser la nature de l'origine et dessiner l'allure du plan de phase ainsi que l'allure des trajectoires.

$$x'' + 5x' + x = 0, \qquad x'' + x' + 4x = 0, \qquad x'' = -x$$

On pourra poser $y = x'$ et exprimer les équations sous la forme d'un système différentiel linéaire.

Exercice 17. Pour le système suivant, discuter de la nature de l'origine en fonction du paramètre $p > 0$.

$$x'' + 2(p-1)x' + x = 0$$

Exercice 18. Etudier le système linéaire suivant en fonction du paramêtre $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x' = x - 2y + \lambda x \\ y' = 2x - 4y \end{cases}$$

3 Systèmes non linéaires en dimension 2.

Exercice 19. Pour les systèmes suivants, étudier les points stationnaires et la nature des points stationnaires puis calculer les isoclines et en déduire le où les comportements possibles du système par une analyse graphique.

$$\begin{cases} x' = x(1-x+2y) \\ y' = y(1-y+2x) \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = x(1-2x+y) \\ y' = y(1-2y+x) \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = x(1+y) \\ y' = y(1+x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x(1-x-2y) \\ y' = y(1-y-2x) \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = x(1-2x-y) \\ y' = y(1-2y-x) \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = x(1-y) \\ y' = y(1-x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x(1-x-2y) \\ y' = y(1-y+2x) \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = x(1-2x-y) \\ y' = y(1-2y+x) \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = x(1-y) \\ y' = y(1+x) \end{cases}$$

Exercice 20. Pour les systèmes suivants, étudier les points stationnaires et la nature des points stationnaires puis calculer les isoclines et en déduire le où les comportements possibles du système par une analyse graphique.

$$y'' + y' + y(1-y) = 0, \qquad y'' + 3y' + y(y-1) = 0, \qquad y'' + y' + y(1-y)(y-0.5) = 0.$$

Exercice 21. [Le pendule] Soit un pendule de longeur ℓ faisant un angle $\theta(t)$ avec la verticale au temps t. Le système du pendule simple sans frottement est est

$$\ell\theta'' + g\sin(\theta) = 0.$$

1. En utilisant le fait que $\sin(\theta) \approx \theta$ lorsque $\theta \to 0$, étudier le système pour de petite valeur de θ.
2. Faire l'étude générale (autant que possible).
3. Lorsque l'on prend en compte les frottements de l'air, en notant m la masse du pendule et k le coefficient de frottement, l'équation devient $\ell\theta'' + g\sin(\theta) = -\frac{k}{m\ell}\theta'$. Étudier cette nouvelle équation.

Exercice 22. Le modèle de proie prédateur avec croissance logistique de la proie s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} u' = u(1-u/K-av) \\ v' = v(-r+bu) \end{cases}$$

où $u(t)$ et $v(t)$ décrivent la population de la proie et du prédateur respectivement et où K, a, b et r sont des constantes strictement positives. Etudier la dynamique de ce système dans le quadrant $(u,v) \in \mathbb{R}^2_+$. On précisera notamment pourquoi les solutions restent positives.

Exercice 23. En fait, le taux de prédatation n'est pas linéaire en le nombre de proie, il y a un seuil maximal au nombre de proie pouvant être exploitées par chaque prédateur.
Le modèle proie prédateur le plus utilisé s'écrit ainsi de la manière suivante :

$$\begin{cases} u' = u(1-u/K) - vf(u) \\ v' = -rv + \alpha f(u) \end{cases}$$

où $u(t)$ et $v(t)$ décrivent la population de la proie et du prédateur respectivement et où K, α et r sont des constantes strictement positives et où $f(u) = \frac{au}{1+bu}$ ($a > 0$ et $b \geq 0$) est la fonction de consommation. Etudier la dynamique de ce système dans le quadrant $(u,v) \in \mathbb{R}^2_+$ en fonction des différents paramètres.

Exercice 24. [Modèle de Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov] Le modèle de FKPP décrit l'évolution dans le temps $t > 0$ et dans l'espace $x \in \mathbb{R}$ de la concentration d'une espèce $u(t, x)$. Ce modèle est donné par une équation aux dérivées partielles (EDP) :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = ru(x,t)(1-u(x,t)) + d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t).$$

Le terme $d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ décrit le déplacement de u dans l'espace via un processus de diffusion. Certaines solutions de cette équations sont des profils $U(\xi)$ fixés se déplaçant à une vitesse $c > 0$ dans l'espace. Ceci s'écrit mathématiquement

$$u(x,t) = U(x - ct).$$

On montre facilement qu'un tel profil vérifie l'équation différentielle

$$dU'' + cU' + rU(1-U) = 0. \tag{1}$$

Le but de l'exercice est de déterminer des condition nécéssaire pour que U soit une onde de propagation vérifiant $U(-\infty) = 0$ et $U(+\infty) = 1$.
1 - On pose $d = r = 1$. Calculer les solutions stationnaire positives ou nulles de (1) et étudier leurs stabilité en fonction de c. (On pourra s'inspirer de l'exercice 20). 2- Toujours pour $d = r = 1$, en déduire les valeurs de c pour lesquelles un profile $U \geq 0$ vérifiant $U(-\infty) = 0$ et $U(+\infty) = 1$ peut exister.
3- Généraliser l'étude pour d et r quelconques.

Exercice 25. [Le Modèle de croissance cyclique de Goodwin] Le modèle de croissance cyclique de Goodwin correspond à l'évolution au cours du temps du marché de l'emploi et des parts de salaires dans le revenu national d'une économie. On note respectivement $x(t)$, et $y(t)$ le taux de demande d'emploi et la part des salaires dans le revenu national au temps t. Ces deux quantités peuvent être déterminées en fonction de cinq paramètres économiques : Le stock de capital $K(t)$, la production $Y(t)$, l'emploi courant $L(t)$, l'offre de travail $N(t)$, et enfin le taux de salaire réel $w(t)$. En supposant que la demande de travail est déterminée par le plein emploi du capital, nous avons $x(t) = L(t)/N(t)$ et $y(t) = w(t)L(t)/Y(t)$ Nous conviendrons par la suite que les taux de variation de l'emploi et des salaires sont de la forme suivante

$$N'(t) = \nu N(t), \quad L'(t) = L(t)\left(-\beta + \frac{K'(t)}{K(t)}\right) \text{ et } w'(t) = (px(t) - \gamma)\, w(t).$$

On suppose de plus que le capital est proportionnel à la production et que l'investissement K' est égal au profits :

$$K(t) = \frac{1}{h}Y(t), \qquad K'(t) = Y(t) - w(t)L(t)$$

Enfin, on suppose que tous les paramètres sont positifs ainsi que $h > \beta + \nu$.

1 - Montrer que $x(t)$ et $y(t)$ vérifient le système

$$\begin{cases} x' = ax - byx \\ y' = -cy + dxy \end{cases}$$

où a, b, c et d sont des constantes positives à déterminer.
2 - Étudier les points stationnaires de ce système et leurs natures.
3 - Étudier la dynamique globale de ce système.
4 - Pensez vous que ce système est robuste ?
Que se passe-t-il par exemple si on remplace l'équation de L' par

$$L' = \alpha L(-\beta + K'/K)$$

pour un certain $\alpha > 0$?

Exercice 26. [Modèle de croissance néoclassique] On s'intéresse au modèle

$$\begin{cases} k' = f(k) - c - (\delta + n)k \\ U''(c)c' = U'(c)[\rho + \delta - f'(k)] \end{cases}$$

où $k(t)$ décrit le ratio capital/travail au temps t, $c(t)$ est la consomation par personne au temps t, δ, n, ρ et δ sont des constantes positives et où,par exemple, $f(k) = k(\mu - k)$ $(\mu > 0)$ décrit la fonction de production et $U(c)$ est la fonction d'utilité que l'on suppose croissante, concave et telle que $U(0) = 0$.
(La dérivation de ce modèle, utilisant des techniques d'optimisation dynamique, est décrites dans le livre "Mathematics for Economics" de Hoy-Livernois-McKenna-Rees-Stengos p 893).
1- Décrire graphiquement la dynamique de ce modèle.
2- Déterminer graphiquement une stratégie de consommation $c(t)$ conduisant à l'équilibre non trivial du modèle.
(Ceci correspond à une trajectoires reliant l'équilibre $(k, c) = (0, 0)$ à un équilibre positif (k^*, c^*)).