Systèmes dynamiques en temps continu

Sten Madec

September 2, 2026

Sommaire

1 Systèmes différentiels : généralités et dimension 1 **3**
1.1 Exemples et modèles . . . 3
1.2 Formulation générale . . . 7
1.3 Théorème de Cauchy-Lipchitz . . . 8
1.4 Étude qualitative dans le cas autonome et dimension 1 . . . 11
1.5 Méthodologie de l'étude qualitative rigoureuse de $y' = f(y)$ . . . 11

2 Systèmes linéaires autonomes en dimension 2 et introduction aux complexes **12**
2.1 La démarche d'un point de vue générale . . . 12
2.2 Rappel - Equation du second ordre à coefficient constant . . . 13
2.3 Résolution des équations différentielles de dimension 2 . . . 13
2.4 Cas diagonalisable réelle en dimension 2 . . . 13
2.5 Cas non diagonalisable en dimension 2 . . . 14
2.6 Cas diagonalisable complexe en dimension 2 . . . 15
2.7 Stabilité des points d'équilibres . . . 18
2.8 Résumé avec le diagramme de Poincaré . . . 18

3 Nombre complexes **20**

4 Systèmes non-linéaires en dimension 2 (et plus) : dynamique locale **22**
4.1 Notions de stabilité . . . 22
4.2 Le critère de la linéarisation . . . 22
4.3 Cas dégénéré : le critère de Lyapunov . . . 24
4.4 Méthodologie pratique . . . 25

5 Systèmes non-linéaires en dimension 2 : dynamique globale **27**
5.1 Représentation graphique en dimension 1 . . . 27
5.2 Représentation graphiques en dimension 2 - autonome . . . 27
5.3 Comportement global . . . 28
5.4 Méthodologie pratique d'étude d'un système non-linéaire . . . 29
5.5 Exemples . . . 29

Références

- Pascale DAMERON **Mathématiques des modèles économiques. Analyse Dynamique**, Economica 2001.
  Ce livre à l'originalité de comparer systèmatiquement les modèles discrets et les modèles dynamiques. La fin du livre contient beaucoup d'exemple d'optimisation dynamique. L'analyse qualitative est par contre assez pauvre, le livre mettant l'accent sur le calcul explicite.

- Carl P. Simon et L. Blume **Mathématiques pour économistes.**, de boeck 1998.
  Ce livre est très complet et couvre la plupart des domaines mathématiques. Les chapitres 19 et 20 sont dédiés aux équations différentielles et l'annexe A.3 traite des nombres complexes.

- Michael Hoy, John Livernois, Chris McKenna, Ray Rees et Thanasis Stengos **Mathematics for Economics**, Massachusetts Institue of Technology 2011.
  Ce livre (en anglais) très complet est moins théorique que le précédent mais traite énormément d'exemples issus de l'économie. Les chapitres finissent par un résumé des idées essentielles et de nombreux exercices sont proposées. Notre sujet est traité dans les chapitres 21 à 24.

- Georges Pupion et Gabriel Poulalion **Les mathématiques de l'économiste**, VUIBERT 2004.
  Cours succincts, Beaucoup d'exercices corrigés issus de l'économie. Chapitre 19 et 20 pour notre sujet.

- E.T. Douling **Mathématiques pour économiste**,
  Style à l'ancienne. Un peu austère. Interet historique pour quelques notations et certains exemples.

Organisation du cours

Chapitre 1. Généralités et dimension 1

Cours 1 : Exemples généraux et formalisme.

Cours 2 : Théorème de Cauchy Lipschitz. Champs de vecteurs (autonome et non autonome).

Cours 3 : Cas de la Dimension 1. Représentation graphique du cas autonome en dimension 1. Étude qualitative. TD1.

Chapitre 2. Systèmes linéaires en dimension 2

Cours 4 : Systèmes linéaires généraux (cas diagonalisable y compris complexes). Cartographie des systèmes linéaires en dimension 2. Diagramme de Poincaré.

- Feuille de TD 2.

Cours 5 : 1 octobre CC1 de 1h30 sur les deux premiers chapitres.

Chapitre 3. Systèmes non linéaires en dimension 2

Cours 7 : Systèmes non linéaire en dimension 2, locale. Notion de stabilité.

- Exercices sur le non linéaire (feuille de TD 3).

Cours 8 : Systèmes non linéaire en dimension 2, représentation graphique.

- Exercices sur le non linéaire (feuille de TD 3 suite).

Cours 9 : 5 novembre CC2 de 1h30 sur le non linéaire.

Modalités d'évalutations :

Il y a deux CC obligatoires le 1 octobre et le 5 novembre à 10h15.
La moyenne intermediaire est $MI = 0.5 \times (CC1 + CC2)$.
Une fois cette note connue deux choix s'offrent à vous.

Choix 1 : Si vous le souhaitez MI sera la note finale

$$MF = MI.$$

Choix 2 : Sinon, une seconde chance aura lieu le 26 novembre sur inscription obligatoire. Ce CC3 optionnel portera sur l'ensemble du programme et comptera pour moitier dans la note finale :

$$MF = 0.5 \times (MI + CC3).$$

Il n'y a pas de seconde session.

Introduction

Dans ce cours nous nous intéresserons à l'étude des systèmes dynamiques en temps continu régis par des équations différentielles.
Les équations différentielles sont omniprésentes dans de très nombreux domaine notamment en physique, en biologie, en économie, en théorie du contrôle.

Ce cours a l'ambition de donner un aperçu (non exhaustif) des méthodes les plus classiques dans les systèmes dynamiques. Ce n'est ni un cours de mathématiques théoriques, ni un cours d'application pour l'économie.
Nous commencerons par présenter le formalisme général des équations différentielles ainsi qu'une classification (simplifiée) des problèmes sous-jacent. Après avoir détaillé quelques exemples variés, nous présenterons le théorème fondamental des équations d'évolutions : le théorème de Cauchy-Lipschitz (sous plusieurs formes), et insisterons sur ses conséquences.
Nous étudierons ensuite en détail le cas de la dimension 1 (autonome). Puis aborderons la théorie linéaire générale en insistant tout particulièrement sur le cas de la dimension 2. Nous aborderons ensuite les système non-linéaires en détaillant la théorie de la stabilité ainsi que l'approche globale en dimension 2.
Ce cours sera conclu par une introduction aux concepts de cycles limites (en dimension 2 et plus) et au chaos (en dimension 3 et plus).

1 Systèmes différentiels : généralités et dimension 1

1.1 Exemples et modèles

Objectifs. : Dans chacun des exemples suivant, réfléchir à la modélisation: quels sont les choix et les hypothèses que l'on a fait pour écrire les équations ? Un des buts de ce module est de désacraliser les maths et les *"vérités"* mathématiques.

Exemple 1
Mécanique newtonienne (exemples triviaux et moins triviaux)

$$mx''(t) = -mg.$$

d'où l'expression explicite $x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + x'(0)t + x(0)$. Le problème est résolu dès lors que l'on connaît $x'(0)$ et $x(0)$.
Exercice : Au bout de combien de temps un objet atteint-il le sol lorsque l'on le lâche d'une hauteur L ?

Exemple 2
On lance une balle, on veut qu'elle tombe à une distance L. Quelle vitesse (direction+norme) doit-on imposer. Les lois de Newton donnent

$$\begin{cases} mx'' = 0 \\ my'' = -mg \end{cases}$$

d'où

$$x(t) = V_x t + x_0$$

et

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_y t + y_0.$$

où $V = (V_x, V_y)$ est le vecteur vitesse initiale.
Exercice. Ecrire y en fonction de x. Quelle est la forme de la trajectoire ?

Exemple 3 Biologie : Croissance exponentielle de Thomas R Malthus (Economiste anglais, modèle de 1798)
Notons $N(t)$ le nombre d'individu d'une population donnée au temps t. On suppose que la variation ΔN du nombre d'individu entre la date t et la date $t + \Delta t$ est proportionnelle, avec un taux au nombre d'individu $N(t)$ à l'instant t et au temps écoulé. Typiquement $r = b - m$ où $b > 0$ est le nombre de naissance par individu pendant un temps Δt (taux de naissance) et m est le nombre de mort par individu pendant un temps Δt (taux de mortalité).

On a alors

$$\Delta N = rN(t)\Delta t.$$

On a bien sur $\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t)$ d'où

$$N(t + \Delta t) - N(t) = rN(t)\Delta t$$

ce que l'on peut réécrire

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = rN(t)$$

A priori $N(t) \in \mathbb{N}$. Afin de travailler avec une quantité continue, on choisi un nombre constant K grand[1] et on pose $u(t) = N(t)/K$ L'équation se réécrit alors

$$\frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} = ru(t)$$

En passant à la limite $\Delta t \to 0$, on obtient l'équation différentielle de premier ordre :

$$u'(t) = ru(t).$$

Le modèle est *linéaire* ce qui signifie que le second membre est linéaire. La simplicité du cas linéaire permet de résoudre explicitement cette équation si l'on connait u au temps 0 :

$$u(t) = u(0)e^{rt}.$$

Le temps 0 est bien sur arbitraire, et on a pour tout t_0 :

$$u(t) = u(t_0)e^{r(t-t_0)}.$$

Ce modèle prédit donc une croissance (ou décroissance) exponentielle d'une population. Plus précisement :

- Lorsque $u(t_0) = 0$ alors $u(t) = 0$ pour tout t. Il n'y a pas de génération spontanée.

[1] Selon les situations, l'unité de K peut changer, mais ce n'est pas important pour notre propos.

- Lorsque $u(t_0) > 0$ alors $u(t) > 0$ pour tout t (pourquoi ?). Selon la valeur de r, 3 comportements limites sont possibles.
  - Si $r < 0$: $u(t) \to 0$ (décroissance exponentielle)
  - Si $r > 0$: $u(t) \to +\infty$ (croissance exponentielle)
  - Si $r = 0$: $u(t) = u(t_0)$ pour tout t. (c'est un cas critique dans lequel il n'y a pas d'évolution).

Exemple 4 : Loi logistique. Dans la nature, il y a souvent des phénomènes d'auto-régulation. La croissance exponentielle précédente est valable lorsque le taux de croissance r est indépendant de la population. Ceci peut être vrai pour des petites populations[2] mais lorsque la population grandi le taux de croissance peut être limité par la capacité d'accueil du milieu. Pour prendre en compte ce phénomène, Pierre François Verhulst (mathématicien Belge, modèle de 1845 en réponse à Malthus) proposa de prendre un taux r décroissant en u : $r(u) = r[1 - u/K]$. Ceci conduit à l'équation suivante :

$$u'(t) = ru\left(1 - \frac{u}{K}\right).$$

Faire l'étude graphique rapide de $u \mapsto ru\left(1 - \frac{u}{K}\right)$ et lire la dynamique sur l'axe des u.
Justifier que K est la capacité d'accueil du milieu.
On peut résoudre explicitement en remarquant que $u'/\left[u\left(1 - \frac{u}{K}\right)\right]$ s'intégre explicitement. (Il faut admettre par exemple que $0 < u(t) < K$ pour tout t, hypothèse sur laquelle on reviendra au cours 2 avec le théorème de C.L.).

En effet, on a

$$\frac{1}{u\left(1 - \frac{u}{K}\right)} = \frac{1}{u} + \frac{1/K}{\left(1 - \frac{u}{K}\right)}$$

On écrit maintenant

$$\frac{u'}{u\left(1 - \frac{u}{K}\right)} = r$$

donc

$$\frac{u'}{u} + \frac{u'/K}{\left(1 - \frac{u}{K}\right)} = r$$

Prenons la condition initiale $u_0 = u(0)$. En intégrant entre 0 et t il vient :

$$\log(u(t)) - \log(u_0) - \log\left(1 - \frac{u(t)}{K}\right) = \log\left(1 - \frac{u_0}{K}\right) = rt$$

En passant à l'exponentiel, on obtient

$$\frac{u(t)}{u_0} \cdot \frac{1 - \frac{u_0}{K}}{1 - \frac{u(t)}{K}} = \frac{u_0}{1 - \frac{u_0}{K}} e^{rt}$$

Soit après quelques manipulations algébriques :

$$u(t) = \frac{K u_0 e^{rt}}{K + u_0(e^{rt} - 1)}$$

Exercices : Reprendre le calcul chez vous en prenant un temps initial t_0 quelconque. En supposant que $u(t) > K$ pour tout t.

Exemple 5 Effet Allee

Etudier le systeme

$$u' = ru(b - u)(1 - \frac{u}{K})$$

avec $0 < b < K$ et le comparer à l'exemple précédent.

[2] Voir la partie linéarisation.

Exemple 6 Economie : multiplicateur dynamique. *Soit $Y(t)$ le revenu à l'instant t, $C(t)$ la consommation, $0 < c < 1$ la propension marginale à consommer, $\lambda > 0$ un coefficient d'ajustement et $A > 0$ une constante. On suppose que*

$$Y'(t) = \lambda(C(t) - Y(t)).$$

$$C(t) = cY(t) + A.$$

Exemple 7 Exemples ou la variable n'est pas le temps.
On suppose une fonction $U(x) > 0$ d'un bien x telle que son élasticité $\dfrac{xU'(x)}{U(x)}$ est constante. Calculer la forme de $U(x)$.
On trouve $U(x) = Ax^\alpha$ où α est l'élasticité.
Si l'élasticité est linéaire ?
On trouve $U(x) = Ae^{\alpha x}$ où αx est l'élasticité.
Exemple 8 Un autre exemple ou la variable n'est pas le temps : la Chaînette.

- longueur entre les deux points d'attache : $2d$ ($x \in [-d, d]$)
- $y(x)$ est la hauteur de la chaîne. On suppose que la chaîne est attachée en $x = -d$ et $x = d$ à la même hauteur que l'on fixe à 0 : $y(-d) = y(d) = 0$. On laisse ensuite pendre la chaîne (donc $y(x) < 0$ pour $x \in [-d, d]$).
- Paramètre clef : $a = \dfrac{T}{\rho}$ rapport entre la tension horizontale et la masse linéique de la chaine. (Une portion dl de la chaine a une masse $dm = \rho dl$).

Une étude des contraintes physiques donne

$$y''(x) = \frac{1}{a^2}y, \quad y(-d) = y(d) = 0$$

On laisse la résolution en exercice (cf chapitre 2).
Exemple 9. Epidemiologie: système SIS
On s'intéresse a une population d'hôtes. La population est découpé entre les susceptible ($S(t)$ (individus sains pouvant être contaminé) et les Infectés $I(t)$. Le modèle s'écrit

$$\begin{cases} S' = N - rS + \beta SI + \gamma I \\ I' = \beta SI - (r_I + \gamma)I \end{cases} \tag{1}$$

où N est le recrutement, r_S et r_I le taux de mortalité des individus sains, β le taux d'infection et γ le taux de guérison.
Exercice. Dans le cas où $r_I = r_S = r$ montrer que la population totale $S+I$ tend vers $K = N/r$. Etudier alors la dynamique du système.
Exemple 10. Inflation et taux d'interets. (Modèle IS-LM dynamique)
Ce système modélise l'interaction entre le marché des biens et celui de la monnaie.

$$\begin{cases} y'(t) = a\left[I(r(t)) - S(y(t))\right] \\ r'(t) = b[M - L(y(t), r(t))] \end{cases}$$

où

- $y(t)$: revenu national
- $r(t)$: taux d'intérêt
- $I(r)$, $S(Y)$: investissement et épargne
- M, $L(Y, r)$: masse monétaire et demande de monnaie

1.2 Formulation générale

Une équation différentielle d'ordre n générale est simplement une relation quelconque entre les n dérivées d'une fonction inconnue du type

$$F(t, y, y'(t), y''(t), \cdots, y^{(n)}(t)) = 0.$$

Dans ce cours, nous interpréterons le plus souvent la variable t comme un temps (d'où le terme dynamique) mais les résultats sont évidemment indépendant de la nature de la variable $t \in \mathbb{R}$. t peut par exemple être une quantité d'un bien, une localisation spatiale, une température....
En revanche, cette variable t est elle toujours unidimensionelle. Si t était multidimensionelle, les expression ci-dessus ferait intervenir les *dérivées partielles* de y ce qui donnerai des *équations aux dérivées partielles* dont l'étude est bien plus complète.
La forme générale précédente peut être extrèmement complexe et il est très difficile d'obtenir une théorie générale pour les équations de cette forme.
Dans de nombreux cas, une équation différentielle d'ordre n peut s'écrire sous une forme dite *forme normale* qui exprime la dérivée d'ordre le plus elevé en fonction des autres dérivées.

$$y^{(n)}(t) = f(t, y, y'(t), \cdots, y^{(n-1)}).$$

Nous ne nous intéresserons qu'aux équations différentielles sous une forme normale.
Dans ces écritures, on la fonction inconnue peut être multi-dimensionelle

$$y(t) = (y_1(t), \cdots, y_d(t)) \in \mathbb{R}^d.$$

Ainsi, en générale on a

$$f \ : \ \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^d \times \cdots \times \mathbb{R}^d}_{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

la régularité de cette fonction f sera importante en pratique.

1.2.1 Remarques générales

1)Tout est d'ordre 1
Les équations différentielles d'ordre n peuvent toujours s'écrire sous la forme d'un système différentielle d'ordre 1.
En effet, notons $U_k = y^{(k)}$, on a

$$y^{(n)}(t) = f(t, y, y'(t), \cdots, y^{(n-1)}) \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} U_1' = U_2 \\ U_2' = U_3 \\ \vdots \\ U_{n-1}' = f(t, U_1, \cdots, U_{n-1}) \end{cases}$$

2)

$$y'(t) = f(t)$$

$$y'(t) = f(y)$$

$$y'(t) = a(t)f(y)$$

$$y'(t) = f(t, y)$$

3)Problème de Cauchy vs conditions aux limites.
Pour résoudre une équation différentielle, on a besoin de condition supplémentaire. De manière générale, pour qu'un système d'équations différentielles soit bien posé il faut autant de contraintes que la dimension du système.
Plus de contrainte implique éventuellement aucune solution.

Trop peu de contraintes implique des variables libres.

Nous nous intéresserons tout particulièrement au problème avec une condition initiale dit problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ce qui donne exactement autant de contraintes que la dimension du système.

1.3 Théorème de Cauchy-Lipchitz

1.3.1 Énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit $D \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, et $f : \mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}^d$ une fonction. Soit l'équation différentielle ordinaire suivante:

$$y'(t) = f(t,y)\,. \tag{2}$$

Définition 1.1. *Une fonction $y : I \to \mathbb{R}^d$ définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ est **solution** de l'équation différentielle ordinaire (2) si y est différentiable sur I et si pour tout $t \in I$, la fonction y vérifie: $y(t) \in D$ et*

$$y'(t) = f(t,y)\,.$$

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in D$. On s'intéresse par la suite au problème de Cauchy :

$$y'(t) = f(t,y),\ y(t_0) = y_0. \tag{3}$$

Définition 1.2. *Une fonction $y : I \to \mathbb{R}^d$ définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ est **solution** du problème de Cauchy (3) si $t_0 \in I$, $y(t_0) = y_0$, y est différentiable sur I, et si pour tout $t \in I$, la fonction y vérifie: $y(t) \in D$ et*

$$y'(t) = f(t,y)\,.$$

Dans les deux définitions précédentes, on dit que la solution y est une solution globale si $I = \mathbb{R}$, et locale si $I \subset \mathbb{R}$, $I \neq \mathbb{R}$. Le théorème suivant permet de savoir si le problème (3) admet une unique solution globale, **dans le cas** $D = \mathbb{R}^d$.

Théorème 1.1 (Théorème de Cauchy-Lipschitz global)**.** *Si f est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur $\mathbb{R}^d$ (uniformément en t), c'est à dire (pour n'importe quelle norme $\|.\|$ sur $\mathbb{R}^d$...)*

$$\exists k > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^d,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k\|x - y\|\,,$$

alors le problème de Cauchy (3) admet une et une seule solution y, définie sur $I = \mathbb{R}$ tout entier.

Ce théorème est surtout utile en théorie. En pratique, il faut vérifier le caractère globalement lipschitzien de la fonction f sur $\mathbb{R}^d$, ce qui peut être très restrictif (par exemple $f(y) = y^2$ n'est pas globalement lipschitz sur $\mathbb{R}$) et compliqué à utiliser. On a cependant un critère pratique permettant d'utiliser ce théorème dans certains exemple:

Proposition 1.1. *Toute fonction f dérivable sur $\mathbb{R}^d$, de dérivée bornée sur $\mathbb{R}^d$, est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^d$.*

Ainsi, en pratique, le théorème 1.1 peut s'appliquer à toute fonction f qui est dérivable en la seconde variable avec dérivée bornée.
Nous allons affaiblir cette hypothèse en nous limitant aux fonctions dérivables de dérivées non nécessairement bornée. Mais il y a un prix a payer : les solutions ne seront plus nécessairement définies sur $\mathbb{R}$ entier, mais uniquement sur un intervalle restant à déterminer. Pour gérer cette difficulté, on introduit la définition suivante.

Définition 1.3. *Une solution y définie sur un intervalle ouvert I contenant t_0 est dite maximale si on ne peut pas la prolonger sur un intervalle J contenant strictement I.*

Théorème 1.2 (CL Énoncé C^1)**.** *Soit $D \in \mathbb{R}^d$ un ouvert. On suppose que*

1. *f est continue sur $\mathbb{R} \times D$*
2. *f est C^1 par rapport à la deuxième variable sur D*

Alors il existe $a, b \in]0, +\infty]$, un intervalle $I =]t_0 - a, t_0 + b[$ et une unique fonction $y : I \to D$ solution maximale de (3).

Proposition 1.2. ***Dans le cas où*** $D = \mathbb{R}$**.** *Soit l'intervalle de définition de la solution maximale $I =]t_0 - a, t_0 + b[$. Ou bien $a = +\infty$ ou bien il existe une suite $t_n \to a$ telle que $\|y(t_n)\| \to \pm\infty$.*
De même, ou bien $b = +\infty$ ou bien il existe une suite $t_n \to b$ telle que $\|y(t_n)\| \to \pm\infty$.
En particulier, si on sait a priori que $y(t)$ est **bornée***, alors $I = \mathbb{R}$ et le problème de Cauchy admet une solution globale.*

Cas linéaire, justifié par C-L

$$y' = a(t)y + b(t)$$

1) On étudie le système homogène $y' = a(t)y$ dont la solution est de la forme $y_h(t)\lambda e^A(t)$ avec $A(t)$ une primitive de $a(t)$.
2) On cherche les solutions sous la forme $y(t) = \lambda(t)e^{A(t)}$ (c'est la méthode de la variation de la constante).
Exemple et Contre-exemple de C-L global/local
Exemple : $y' = y^2, y(t_0) = y_0$, $y' = \sqrt{y}, y(t_0) = 1$. *Contre-exemple:* $y' = \sqrt{y}, y(t_0) = 0$.
Même résultat pour les cas à variable séparable $y' = a(t)y^\alpha$. Si $y(t)$ est non nul, alors on écrit

$$y'/y^\alpha = a(t)$$

et on intègre de chaque coté.
Dans les cas simples où $a(t) = a$ ne dépend pas de t, on voit que si $\alpha > 1$ il y a explosion en temps fini et si $0 < \alpha < 1$ alors il n'y a pas une solution unique.

1.3.2 Conséquences importantes de CL

Conséquence 1 : les trajectoires ne se croisent pas
La première conséquence évidente de CL est que deux trajectoires distinctes ne peuvent se croiser.
En effet, supposons que y_1 et y_2 soient deux fonctions distinctes sur un intervalle ouvert I solutions de $y' = f(t, y)$ avec f une fonction C^1. Dire que y_1 et y_2 sont distinctes c'est dire qu'elle ne sont pas égales en tout temps $t \in I$.
On fait un raisonnement par l'absurde. Supposons qu'elles se croisent c'est-à-dire qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $y_1(t_0) = y_2(t_0)$. Mais alors on a y_1 et y_2 sont solutions du problème de Cauchy

$$y' = f(y), \quad y(t_0) = y_0.$$

l'unicité de la solution implique que y_1 et y_2 sont confondue sur I. Contradiction.
Conséquence 2 : sur et sous solutions.
Dans le cas particulier et important de fonction à valeur dans $\mathbb{R}$, ce principe conduit au principe de comparaison suivant.

Théorème 1.3. *Soient $E \subset \mathbb{R}$ et f et g deux fonctions C^0 sur $\mathbb{R} \times E$ et C^1 sur E. On considère les deux systèmes dynamiques*

$$x' = f(t, x),\ x(t_0) = x_0$$

et

$$y' = g(t, y),\ y(t_0) = y_0$$

On suppose que les deux solution maximale sont définie sur un intervalle ouvert I qui contient t_0. On suppose que les deux inégalités suivantes sont vérifiées :

- $\forall t \in I, \forall x \in E,\ f(t,x) \leq g(t,x)$.
- $x_0 \leq y_0$

Alors on a

$$\forall t \in I,\ x(t) \leq y(t).$$

De plus, si l'une des deux inégalités est stricte, alors

$$\forall t \in I,\ x(t) < y(t).$$

Un cas particulier important est le suivant.
Soit $x_1(t) \in \mathbb{R}$ et $x_2(t) \in \mathbb{R}$ solutions de $x' = f(t,x)$ définies sur $I \subset \mathbb{R}$ avec respectivement $x_1(t_0) = a_1$ et $x_2(t_0) = a_2$. Si $a_1 < a_2$ alors $x_1(t) < x_2(t)$ pour tout $t \in I$.
Application directe et super importante: "on ne franchit pas les équilibres". *Soit* $u(t) = uf(t,u)$ *et* $u_0 > 0$. *Justifier que* $u(t) > 0$ *pour tout* t.
Soit $u(t) = f(u)$ *avec* $f(a) = f(b) = 0$ *et* $a < u(0) < b$ *Justifier que* $a < u(t) < b$ *pour tout* t. *En déduire que* u *est définie sur* $\mathbb{R}$.

1.4 Étude qualitative dans le cas autonome et dimension 1

Dans cette section on s'intéresse à l'étude qualitative de $y' = f(y)$.
Ceci signifie que l'on ne cherche pas a obtenir des solutions explicites, mais que l'on cherche à avoir des informations sur la solution y, si possible pour toute condition initiale $y(t_0) = y_0$.

1.4.1 Le plan de phase

On trace le graphe de la fonction f dans le plan y, y'. La fonction inconnue y est croissante lorsque f est positive et décroissante lorsque f est négative. L'étude graphique est donc possible. La justification des résultats se fait en utilisant le théoèrme de Cauchy Lipschitz ainsi que les deux résultats d'analyse réel suivants que l'on admettra :

Théorème 1.4. *Toute fonction croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) converge.*

Théorème 1.5. *Si $y(t)$ et $y'(t)$ convergent lorsque $t \to +\infty$ alors $y'(t) \to 0$ pour $t \to +\infty$*

En pratique, on justifie par l'unicité de cauchy lipshitz que y' est de signe fixé, donc que y est monotone. Si de plus y est borné (Ou simplement minorée et décroissante ou bien majorée et croissante) alors y converge par le théorème 1.4. Notons y_∞ cette limite.
Comme $y' = f(y)$, comme f est continue (en faite C^1 pour appliquer C.L.) y' converge également vers $f(y_\infty)$. Donc par le théorème 1.5 $f(y_\infty) = 0$ donc y_∞ est un point stationnaire. On peut résumer cela dans le théorème suivant.

Théorème 1.6. *Supposons que $y' = f(y)$ et $y(t_0) = y_0$ avec f une fonction C^1. Supposons que y est croissante majorée ou décroissante minorée (ce point est à démontrer en pratique).*
Alors y est définie pour tout $t \geq t_0$ et converge lorsque $t \to +\infty$. De plus la limite est nécessairement un point stationnaire de f.

1.5 Méthodologie de l'étude qualitative rigoureuse de $y' = f(y)$

1. Déterminer si le théorème de Cauchy-Lipschitz global (version C^1-dérivée bornée) ou local (version C^1) s'applique.
2. Déterminer les points stationnaires.
3. Tracer le graphe de f, et positionner les "flèches".
4. En étudiant le sens de variation de y, montrer la convergence vers des états stationnaire ou vers l'infini (on s'aidera d'un dessin).
5. Justifier de l'existence globale ou non en fonction de la condition initiale.

Exercice 1. Soit le problème de cauchy décrivant une dynamique des populations :

$$u' = uf(u), \quad u(0) \geq 0.$$

1) Justifier que ce problème admet une unique solution positive.
2) On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout x. Montrer que u est définie globalement.

Etudier la feuille de TD1

2 Systèmes linéaires autonomes en dimension 2 et introduction aux complexes

Dans ce chapitre, on s'intéresse a la description du système linéaire de dimension 2 :

$$\begin{pmatrix} x'(t) & = a\,x(t) + b\,y(t) \\ y'(t) & = c\,x(t) + d\,y(t) \end{pmatrix} \tag{4}$$

où $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont les fonctions inconnues et a, b, c, d sont des réels fixés.
Avec la notation vectorielle, on a

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{z}(t)) = A\mathbf{z}(t) \tag{5}$$

où

$$\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \tag{6}$$

et

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{7}$$

Notation: dans la suite, les lettres en gras ($\mathbf{z}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, etc.) désigneront des vecteurs (très souvent de dimension 2), alors que les lettres en caractère normal désigneront des scalaires.
Passage optionnel/très important Les passages grisés sont plus difficiles que les autres et sont à titre informatif. Les passages en rouges sont essentiels et à bien maîtriser.

Problème de Cauchy. Si l'on considère le système (4) muni de la condition initiale $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, on est en présence d'un problème de Cauchy *linéaire*. L'application du théorème de Cauchy-Lipschitz montre donc qu'il existe une unique solution maximale définie sur un interval ouvert $I =]-T_1, T_2[\ni 0$. De plus, une application linéaire étant globalement Lipschitzienne (gradient constante égale à $\nabla F = A$ donc bornée), cette solution est globale en temps donc $I = \mathbb{R}$. En conclusion on a le résultat suivant (valable en toute dimension pour les systèmes linéaires non nécessairement autonome)

Théorème 2.1. *Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ fixé. Le système (4) muni de la condition initiale $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ admet une unique solution $t \mapsto (x(t), y(t))$ définie sur $\mathbb{R}$. De plus, cette solution est C^∞ (c'est à dire "régulière": dérivable une infinité de fois).*

2.1 La démarche d'un point de vue générale

On cherche à résoudre un système linéaire. Par analogie avec la dimension 1, il est raisonnable de chercher les solutions sous la forme d'exponentielle en temps. Ainsi, pour une condition initiale donné par un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, on cherche si la fonction $\mathbf{u}e^{\lambda t}$ est solution de l'équation (5). On est ainsi ramené à la condition:

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}\,, \tag{8}$$

qui est donc un problème au valeur propre, dans lequel à la fois λ et $\mathbf{u}$ doivent satisfaire des contraintes précises. Le problème au valeur propre (8) peut avoir deux solutions distinctes: ceci indique que de manière générale, les solutions ne seront pas sous la forme d'une seule exponentielle en temps, contrairement à la dimension 1.
Ainsi, pour résoudre l'équation (4), on cherche la ou les valeur possible(s) pour la valeur propre λ grâce au racine du polynôme caractéristique de A, qui s'écrit

$$P(X) = \det \begin{pmatrix} a - X & b \\ c & d - X \end{pmatrix} = X^2 - (a+d)X + ad - bc = X^2 - tr(A)X + \det(A) \tag{9}$$

2.2 Rappel - Equation du second ordre à coefficient constant

Soit l'équation différentielle homogène d'ordre 2

$$ay'' + by' + cy = 0\,. \tag{10}$$

Si $a \neq 0$, en notant $z_1 = y$ et $z_2 = y'$, on se ramène au système linéaire autonome de dimension 2 suivant, équivalent à l'équation (10):

$$z'(t) = F(z(t)) = Az(t) \tag{11}$$

où

$$z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} \tag{12}$$

et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c/a & -b/a \end{pmatrix} \tag{13}$$

On rappelle que l'étude des solutions de (10) est basé sur les racines du **polynôme caractéristique** associé à (10) (qui s'obtient avec l'ansatz $y = y_0 e^{\lambda t}$):

$$\tilde{P}(X) = aX^2 + bX + c\,. \tag{14}$$

On note $\Delta := b^2 - 4a$. On rappelle qu'on distingue trois cas, suivant si est $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, ou $\Delta < 0$ (voir cours de L2). On note enfin que le **polynôme caractéristique associé à la matrice** (13) est

$$P(X) = \det \begin{pmatrix} 0 - X & 1 \\ -c/a & -b/a - X \end{pmatrix} = X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a} = X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a} = X^2 - tr(A)X + \det(A) \tag{15}$$

Lorsque $a \neq 0$, il est clair que les racines du polynôme $P(X)$ donné par l'équation (15) sont les mêmes que celle du polynôme $\tilde{P}$ donné par l'équation (14) (car $\tilde{P}(X) = aP(X)$): **Les systèmes différentielles de dimension 2 comme l'équation** (4) **sont donc bien une généralisation des équations différentielles de dimension 1 et d'ordre 2, comme l'équation** (10)**.**

2.3 Résolution des équations différentielles de dimension 2

On reprend ici la résolution de l'équation (4). Dans la suite, on donne les solutions générales de cette équation, en s'attachant à expliciter la méthode pratique de résolution ainsi que les conséquences qualitative et graphiques. On précise que ces conséquences sont au moins aussi importantes que les formules explicites, et seront fondamentales pour les chapitres suivant. Comme pour les équations différentielles de dimension 1 et d'ordre 2, on distingue trois cas, en fonction des solutions du problème au valeur propre (8).

2.4 Cas diagonalisable réelle en dimension 2

Supposons que la matrice A admette deux vecteurs propres réels $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ linéairement indépendants, associés aux valeurs propres réels λ_1 et λ_2, respectivement. Ainsi $A\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{u}$ et $A\mathbf{v} = \lambda_2\mathbf{v}$. Une condition suffisante (mais non nécessaire) pour l'existence de tels vecteurs propres est l'existence de deux racines réels distinctes du polynôme caractéristique de A, *e.g.* $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Notons que le fait que les deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ soient linéairement indépendants impliquent que pour tout point $z_0 \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique couple de coefficient réels c_1 et c_2 tels que $z_0 = c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v}$. Ce résultat, associé à l'application du théorème de Cauchy-Lipschitz, permet de démontrer le théorème suivant.

Théorème 2.2. *Si A admet deux vecteurs propres réels $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ linéairement indépendants associés aux valeurs propres réels λ_1 et λ_2, respectivement. Soit $\boldsymbol{z}_0 \in \mathbb{R}^2$ et soit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\boldsymbol{z}_0 = c_1\boldsymbol{u} + c_2\boldsymbol{v}$. Alors l'unique solution du problème de Cauchy*

$$\boldsymbol{z}'(t) = A\boldsymbol{z}(t)\,, \quad \boldsymbol{z}(t_0) = \boldsymbol{z}_0\,, \tag{16}$$

est donnée par

$$\boldsymbol{z}(t) = c_1 e^{\lambda_1(t-t_0)}\boldsymbol{u} + c_2 e^{\lambda_2(t-t_0)}\boldsymbol{v} \tag{17}$$

2.4.1 Conséquences importantes

Conséquence 1 : méthode générale de résolution
Toute solution s'écrit donc

$$\mathbf{z}(t) = Ee^{\lambda_1 t}\mathbf{u} + Fe^{\lambda_2 t}\mathbf{v}\,,$$

où $E, F \in \mathbb{R}$ sont des constantes qui dépendent de la condition initiale. Ainsi, en pratique:

1. on détermine les valeurs propres et les vecteurs propres de A
2. on écrit la solution générale
3. on trouve les constantes grâce à la condition initiale.

De manière équivalente, on peut chercher $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ de la forme

$$z_1(t) = E_1 e^{\lambda_1 t} + F_1 e^{\lambda_2 t}\,, \quad z_2(t) = E_2 e^{\lambda_1 t} + F_2 e^{\lambda_2 t}\,,$$

et "identifier" les constantes E_1, F_1, E_2, F_2 grâce aux conditions initiales et en remplaçant dans l'équation (5).

Conséquence 2: les sous-espaces propres sont invariants
Si $z_0 = c_1\mathbf{u}$ ($c_2 = 0$), alors pour tout temps t, $\mathbf{z}(t)$ est proportionnelle à $\mathbf{u}$. Idem pour $\mathbf{v}$.

Conséquence 3: comportement qualitatif
Le comportement qualitatif est donné par le signe de λ_1, λ_2 et des constants c_1 et c_2:

- Si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$, alors $\mathbf{z}(t)$ converge vers $\mathbf{0}$ (le vecteur nul) lorsque $t \to \infty$.
- Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$, alors $\mathbf{z}(t)$ diverge lorsque $t \to \infty$. De plus, $z(t)$ tend à s'aligner au vecteur propre $\mathbf{u}$ lorsque $t \to \infty$.
- Si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$, alors $\mathbf{z}(t)$ diverge lorsque $t \to \infty$. De plus, $z(t)$ tend à s'aligner au vecteur propre $\mathbf{v}$ lorsque $t \to \infty$.
- Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, alors $\mathbf{z}(t)$ diverge lorsque $t \to \infty$. De plus, $z(t)$ tend à s'aligner au vecteur propre associé à la plus grande valeur propre.

Conséquence 4: visualisation graphique
On aura en tête les différents dessins en fonction des signes de λ_1 et λ_2 (voir diagramme de Poincaré dans la section 2.8, et corrigé du TD2).
Exemple: voir TD2 pour plus d'exemples

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{18}$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & c \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{19}$$

avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

2.5 Cas non diagonalisable en dimension 2

Supposons que la matrice A admette un seul vecteur propre unitaire $\mathbf{u}$, associé à la valeur propre réel (double) λ_1. Ainsi $A\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{u}$. Une condition nécessaire est l'existence d'une unique racine du polynôme caractéristique de A (*e.g.* le discriminant Δ associé est nul).

Théorème 2.3. *Si A admet un unique vecteur propre unitaire $\mathbf{u}$, associé à la valeur propre réel (double) λ_1, alors l'unique solution du problème de Cauchy*

$$\boldsymbol{z}'(t) = A\boldsymbol{z}(t)\,, \quad \boldsymbol{z}(t_0) = \boldsymbol{z}_0\,, \tag{21}$$

est donnée par

$$\boldsymbol{z}(t) = (\boldsymbol{z}_0 + (A - \lambda_1 I_2)\boldsymbol{z}_0 t)\, e^{\lambda_1 t}\,, \tag{22}$$

où I_2 est la matrice diagonale unitaire.

2.5.1 Conséquences importantes

Conséquence 1 : méthode générale
On calcul les valeurs propres de A (racine du polynôme caractéristique). Si on trouve une valeur propre double, en pratique:

1. On détermine le ou les vecteurs propres unitaires associés.
2. Si on trouve deux vecteurs propres linéairement indépendants, on applique le cas diagonalisable réelle, section 2.4.
3. Si on trouve un seul vecteur propre unitaire, on applique la formule (22).

De manière équivalente, on peut chercher $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ de la forme

$$z_1(t) = (E_1 + F_1 t)e^{\lambda_1 t}\,, \quad z_2(t) = (E_2 + F_2 t)e^{\lambda_2 t}\,,$$

et "identifier" les constantes E_1, F_1, E_2, F_2 grâce aux conditions initiales et en remplaçant dans l'équation (5).

Conséquence 2: le sous-espace propre est invariant
Si $\mathbf{z}_0 = c_1\mathbf{u}$, alors pour tout temps, $\mathbf{z}(t)$ est proportionnelle à u, et $\mathbf{z}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{u}$.

Conséquence 3: comportement qualitatif
Le comportement qualitative est donné par le signe de λ_1.

- Si $\lambda_1 < 0$ alors $\mathbf{z}(t)$ converge vers $\mathbf{0}$ (le vecteur nul) lorsque $t \to \infty$.
- Si $\lambda_1 > 0$ alors $\mathbf{z}(t)$ diverge lorsque $t \to \infty$.

Le comportement asymptotique est non-exponentiel en général, lorsque $(A - \lambda_1 I_2)\mathbf{z}_0 \neq \mathbf{0}$. En physique, on parle de phénomène de résonance.

Conséquence 4: visualisation graphique
On aura en tête les différents dessins en fonction du signe de λ_1 (voir (voir diagramme de Poincaré dans la section 2.8, et corrigé du TD2).

Exemple: voir TD2 pour plus d'exemples

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

2.6 Cas diagonalisable complexe en dimension 2

Supposons que la matrice A n'admette aucune valeur propre réelle. Une condition équivalente pour ce scénario est la non-existence de racines réelles du polynôme caractéristique de A (*e.g.* le discriminant Δ associé est strictement négatif). Par exemple, c'est le cas pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

et l'équation différentielle associé est

$$\begin{pmatrix} x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= -x(t) \end{pmatrix} \tag{25}$$

Le polynôme caractéristique associé à A est $P(X) = X^2 + 1$, son discriminant $\Delta = -4 < 0$. On rappelle que les racines de ce polynôme sont données par les deux nombres complexes i et $-i$.
Soit maintenant la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \tag{26}$$

et l'équation différentielle associé est

$$\begin{pmatrix} x'(t) &= -2x(t) + y(t) \\ y'(t) &= -2x(t) \end{pmatrix} \tag{27}$$

Le polynôme caractéristique associé à A est $P(X) = X^2 + 2X + 2$, et son discriminant $\Delta = -4 < 0$. On rappelle que les racines de ce polynôme sont données par les deux nombres complexes $(-1 + i)$ et $(-1 - i)$

De manière plus générale, pour tout polynôme de degré 2, $P(X) = ax^2 + bx + c$ tel que $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, on obtient les racines de P sous la forme

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\ \Delta\ |}}{2a}\,. \tag{28}$$

Remarque: On dit que x_1 et x_2 sont conjugués. En particulier, $x_1 + x_2 = -b/a$. Également, $x_1 x_2 = c/a$. Ainsi $P(x) = a(X - x_1)(X - x_2)$ est bien un polynôme à coefficient réel, dont les racines sont x_1 et x_2, complexes. **Pour un nombre complexe $a + ib$, a est appelée la partie réelle, et b la partie imaginaire.**

Théorème 2.4. *Si A admet deux valeur propre complexes $a + ib$ et $a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $b \neq 0$), alors l'unique solution de l'équation*

$$\boldsymbol{z}'(t) = A\boldsymbol{z}(t)\,, \boldsymbol{z}(0) = \boldsymbol{z}_0 \tag{29}$$

est donnée par $\boldsymbol{z}(t) = (z_1(t), z_2(t))$, où

$$z_1(t) = e^{at}\left(E_1\cos(bt) + F_1\sin(bt)\right)\,, \quad z_2(t) = e^{at}\left(E_2\cos(bt) + F_2\sin(bt)\right)\,, \tag{30}$$

où les constantes E_1, E_2, F_1, F_2 sont déterminées de manière unique par les conditions initiales et l'équation (5).

Le théorème 2.4 s'obtient en développant le point de vue complexe (valeur propre, vecteur propre et exponentiel complexe), en calculant toutes les solutions complexes, puis en projetant aux solutions qui sont réelles, par une bonne annulation des composantes imaginaires dû aux deux racines conjuguées.

2.6.1 Conséquences importantes

Conséquence 1 : méthode générale
On calcul les valeurs propres de A (racine du polynôme caractéristique).

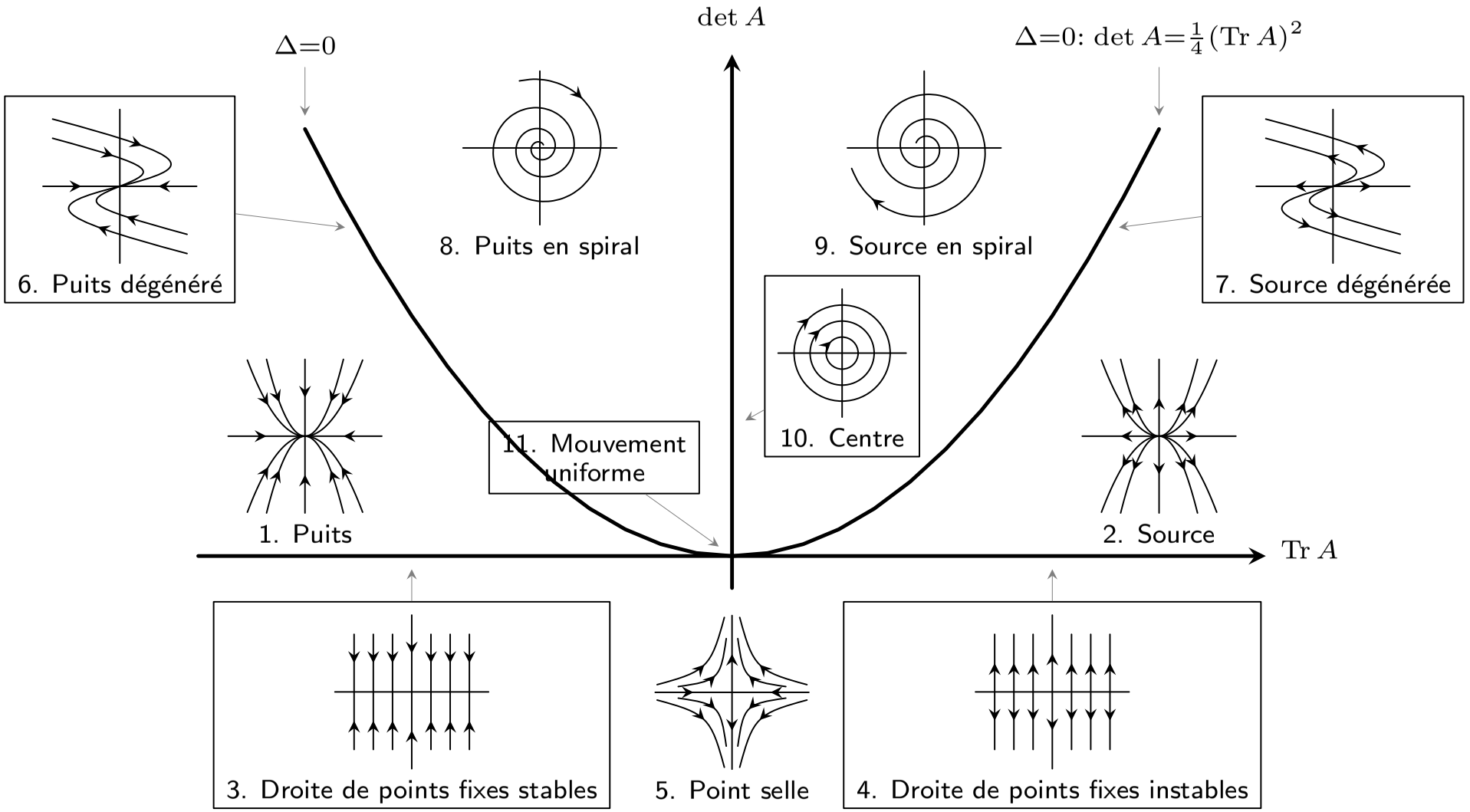
1. Si les racines sont complexes (discriminant négatif), on applique la formule (30).
2. On détermine les constantes grâce aux conditions initiales.

Conséquence 2: comportement qualitatif
Le comportement qualitative est donné par le signe de a (la partie réelle des deux valeurs propres).

- Si $a < 0$ alors $\mathbf{z}(t)$ converge vers $\mathbf{0}$ (le vecteur nul) lorsque $t \to \infty$.
- Si $a > 0$ alors $\mathbf{z}(t)$ diverge lorsque $t \to \infty$.

Le comportement asymptotique est non-exponentiel lorsque $b \neq 0$. En physique, on parle de phénomène oscillant, avec amortissement lorsque $a < 0$. Le portrait de phase ressemble à des spirales.

Diagramme de Poincaré: Classification des Portraits de Phase dans le plan $(\det A, \operatorname{Tr} A)$



2.7 Stabilité des points d'équilibres

Le système différentiel (4) a toujours pour point d'équilibre l'origine (le point $(0,0)$). Dans certains cas dégénérés, il y a aussi d'autres points d'équilibres (une infinité alignés sur une droite, voir les cas 3 et 4 dans la section suivante). On définit informellement les notions de stabilités suivantes (qui seront plus précises par la suite):

Définition 2.1. *Un point d'équilibre est dit*

- ***Asymptotiquement stable:*** *si toutes les trajectoires convergent vers ce point lorsque $t \to \infty$.*
- ***Stable mais non asymptotiquement stable:*** *si les trajectoires ne divergent pas mais outes les trajectoires ne convergent pas vers le point d'équilibre lorsque $t \to \infty$.*
- ***instable:*** *si au moins une trajectoire diverge lorsque $t \to \infty$.*

2.8 Résumé avec le diagramme de Poincaré

On résume l'ensemble des cas possibles pour l'étude qualitative de l'équation (4), à l'aide du diagramme de Poincaré. On détaille chaque partie ci-dessous, en se référant à la numérotation du diagramme en page précédent. On rappelle que le polynôme caractéristique associée à l'équation (4) est le polynôme caractéristique de la matrice A (équation (7)), donnée par

$$X^2 - (a+d)X + ad - bc = X^2 - tr(A)X + \det(A) \tag{31}$$

En notant λ_1, λ_2 les valeurs propres de A (éventuellement complexe, et/ou éventuellement égale), on a

$$\lambda_1\lambda_2 = \det(A)\,, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = tr(A)\,. \tag{32}$$

Notons aussi que le discriminant associé à l'équation (31) est

$$\Delta = tr(A)^2 - 4\det(A)\,, \tag{33}$$

et enfin que les valeurs propres se calculent via

$$\lambda_{1/2} = \frac{tr(A) \pm \sqrt{\Delta}}{2}\,. \tag{34}$$

Le diagramme de Poincaré est basé sur le fait qu'en fonction du signe de $\det(A)$, $tr(A)$ et de la position relative du point $(tr(A), \det(A))$ par rapport à la courbe $\Delta = 0$ (donc du signe de Δ), on peut obtenir le comportement qualitatif des solutions. Dans le diagramme de Poincaré, l'axe des x, horizontale, est donné par la valeur de la trace de A, $tr(A)$, et l'axe des y, vertical, est donné par la valeur du déterminant $\det(A)$.
Chaque portrait de phase inséré est tracé dans le plan des vecteurs propres $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, et en supposant que les vecteurs propres $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont orthogonal (ce n'est pas toujours le cas en pratique, c'est uniquement "schématique" donc). L'origine (le point $(0,0)$) est toujours un point d'équilibre, on discute de sa stabilité en fonction des cas.

1. Puits: $tr(A) < 0$, $\det(A) > 0$, $\Delta > 0$. On a deux valeurs propres réels, avec $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. Les trajectoires convergent toutes vers l'origine. Il y a un unique point d'équilibre, qui est asymptotiquement stable.

2. Source: $tr(A) > 0$, $\det(A) > 0$, $\Delta > 0$. On a deux valeurs propres réels, avec $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Les trajectoires divergent. Il y a un unique point d'équilibre, qui est instable.

3. Droite de points fixes stables: $tr(A) < 0$, $\det(A) = 0$, $\Delta < 0$. On a deux valeurs propres réels, avec $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 < 0$. Les trajectoires sont toutes parallèle au vecteur propre $\mathbf{v}$ associé à λ_2, et convergent vers l'axe horizontal. Il y a une infinité de points d'équilibres (le long de l'axe associé au vecteur propre $\mathbf{u}$ associé à λ_1). Ces points d'équilibres sont stable.

4. Droite de points fixes instables: $tr(A) > 0$, $\det(A) = 0$, $\Delta < 0$. On a deux valeurs propres réels, avec $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$. Les trajectoires sont toutes parallèle au vecteur propre $\mathbf{v}$ associé à λ_2, et divergent toutes. Il y a une infinité de points d'équilibres (le long de l'axe associé au vecteur propre $\mathbf{u}$ associé à λ_1). Ces points d'équilibres sont instable.

5. Point selle: $\det(A) < 0$, $\Delta > 0$. On a deux valeurs propres réels, avec $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ (ou l'inverse). Les trajectoires divergent toutes sauf celles qui ont pour condition initiale un point appartenant au sous-espace associé au vecteur propre $\mathbf{u}$ associé à λ_1 (ces dernières trajectoires convergent vers l'origine). Il y a un unique point d'équilibre, qui est instable.

6. Puits dégénéré: $tr(A) < 0$, $\det(A) > 0$, $\Delta = 0$, et **un unique vecteur propre**. On a une valeur propres réel double, avec $\lambda_1 < 0$. Les trajectoires convergent toutes vers l'origine. Il y a un unique point d'équilibre, qui est asymptotiquement stable.

7. Source dégénérée: $tr(A) > 0$, $\det(A) > 0$, $\Delta = 0$, et **un unique vecteur propre**. On a une valeur propres réel double, avec $\lambda_1 > 0$. Les trajectoires divergent. Il y a un unique point d'équilibre, qui est instable.

8. Puits en spirale: $tr(A) < 0$, $\det(A) > 0$, $\Delta < 0$. On a deux valeur propres complexes, donc la partie réelle est négative. Les trajectoires convergent toutes vers l'origine, en "tournant". Il y a un unique point d'équilibre, qui est asymptotiquement stable.

9. Source en spirale: $tr(A) > 0$, $\det(A) > 0$, $\Delta < 0$. On a deux valeur propres complexes, donc la partie réelle est positive. Les trajectoires divergent, en "tournant". Il y a un unique point d'équilibre, qui est instable.

10. Centre: $tr(A) = 0$, $\det(A) > 0$, $\Delta < 0$. On a deux valeur propres complexes, donc la partie réelle est nulle. Les trajectoires forment des cercles (oscillations périodiques), qui dépendent de la condition initiale. Il y a un unique point d'équilibre, qui est stable (mais pas asymptotiquement stable).

11. Mouvement uniforme: $tr(A) = 0$, $\det(A) = 0$, $\Delta = 0$. On a deux valeur propres nulles, rien ne bouge!

3 Nombre complexes

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{35}$$

et l'équation différentielle associé est

$$\begin{pmatrix} x'(t) & = & y(t) \\ y'(t) & = & -x(t) \end{pmatrix} \tag{36}$$

Le polynôme caractéristique associé à A est $P(X) = X^2 + 1$, son discriminant $\Delta = -4 < 0$. Quels sont les racines de P? On introduit le nombre complexe i telle que

$$i^2 = -1\,. \tag{37}$$

Ce nombre i vérifie les règles de calcul usuel (addition, multiplication par un scalaire) et la multiplication par i est aussi "usuel" en ajoutant la règle $i^2 = -1$. Ainsi $i^7 * i^4 = i^{11} = (i^2)^5 * i = (-1)^5 * i = -i$...). Ainsi les racines de P sont i et $-i$. Soit maintenant la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \tag{38}$$

et l'équation différentielle associé est

$$\begin{pmatrix} x'(t) & = & -2x(t) + y(t) \\ y'(t) & = & -2x(t) \end{pmatrix} \tag{39}$$

Le polynôme caractéristique associé à A est $P(X) = X^2 + 2X + 2$, et son discriminant $\Delta = -4 < 0$. Quels sont les racines de P? On peut également ajouter i et un nombre réel: $i + 1$ est un nouveau nombre (complexe), qui vérifie les règles de calcul usuel en ajoutant la règle $i^2 = -1$. Ainsi, pour tous réels a, b, c, d, on a

$$(a + i * b) * (c + i * d) = ac + i * a * d + i * b * c + i^2 * b * d = ac - bd + i(bc + ad)\,. \tag{40}$$

On trouve alors que

$$(-1 + i)^2 + 2 * (-1 + i) + 2 = 1 - 2i + i^2 - 2 + 2i + 2 = 1 - 1 - 2 + 2 - 2i + 2i = 0\,, \tag{41}$$

et de même

$$(-1 - i)^2 + 2 * (-1 - i) + 2 = 1 + 2i + i^2 - 2 - 2i + 2 = 1 - 1 - 2 + 2 + 2i - 2i = 0\,. \tag{42}$$

De manière plus générale, pour tout polynôme de degré 2, $P(X) = ax^2 + bx + c$ tel que $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, on obtient les racines de P sous la forme (vérifier par le calcul...)

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\ \Delta\ |}}{2a}\,. \tag{43}$$

Remarque: On dit que x_1 et x_2 sont conjugués. En particulier, $x_1 + x_2 = -b/a$. Egalement, $x_1 x_2 = c/a$. Ainsi $P(x) = a(X - x_1)(X - x_2)$ est bien un polynôme à coefficient réel, dont les racines sont x_1 et x_2, complexes. Pour un nombre complexe $a + ib$, a est appelée la partie réelle, et b la partie imaginaire. Maintenant qu'on a des racines pour tout polynôme dont le discriminant est négatif, on veut donner un sens à l'exponentiel d'un nombre complexe (on rappel qu'on cherche des solution sous la forme $e^{\lambda t}$), pour obtenir un théorème analogue au cas diagonalisable. Dans l'exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{44}$$

et l'équation différentielle associé est

$$\begin{pmatrix} x'(t) & = & y(t) \\ y'(t) & = & -x(t) \end{pmatrix} \tag{45}$$

On a $x'' = -x$, et $y'' = -y$, dont les solutions sont de la forme (on le vérifie par le calcul, plus Cauchy-Lipschitz) $A\cos(t) + B\sin(t)$. avec les constantes déterminées par les conditions initiales. On définit le nombre complexe $e^{i\theta}$ comme

$$e^{ib} = \cos(b) + i\sin(b)\,. \tag{46}$$

Ces exponentiels vérifient les règles de calcul usuel. En particulier

$$e^{a+ib}e^{c+id} = e^{a+ib+c+id} = e^{a+c+i(b+d)} = e^{a+c}e^{i(b+d)} = e^{a+c}\left(\cos(b+d) + i\sin(b+d)\right) \tag{47}$$

De manière équivalente,

$$e^{a+ib}e^{c+id} = e^{a}\left(\cos(b) + i\sin(b)\right)e^{c}\left(\cos(d) + i\sin(d)\right) = e^{a+c}\left(\cos(b+d) + i\sin(b+d)\right) \tag{48}$$

où la dernière égalité vient des règles de trigonométrie,

$$\cos(b)\cos(d) - \sin(b)\sin(d) = \cos(b+d)\,, \quad \cos(b)\sin(d) + \cos(d)\sin(b) = \sin(b+d)\,. \tag{49}$$

Rappelons également que $\cos(-b) = \cos(b)$ et $\sin(-b) = -\sin(b)$. On a alors $e^{ib} + e^{-ib} = 2\cos(b)$, et $e^{ib} - e^{-ib} = 2\sin(b)$.

Pourquoi la définition (46) **de l'exponentiel complexe?** On introduit la représentation des nombres complexe $a + ib$ dans le plan $\mathbb{R}^2$, $a + ib \leftrightarrow (a, b)$. Dans le plan, on peut aussi repérer des points grâces au coordonnées polaire $a + ib \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta) = (\sqrt{a^2 + b^2}, \tan(b/a)))$. Si on multiplie le nombre complexe $a + ib$ par i, on obtient $-b + ai$, c'est à dire une rotation de 90 ($\theta \to \theta + \pi/2$). Si on remultiplie par i, à nouveau rotation de 90. Si on multiple par $2i$, on fait une rotation et on multiplie les longueurs ($r \to 2r$, $\theta \to \theta + \pi/2$). Du point de vue des coordonnées polaires:

- multiplier par un nombre complexe revient à faire une addition sur les angles, et multiplier les longueurs.

La fonction exponentiel a les même propriétés:

$$e^{i\theta} * e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}\,, \tag{50}$$

qui est compatible avec les règle de trigonométrie rappelé ci-dessus. Ainsi tout nombre complexe peut être représenté en polaire, et interprété comme $re^{i\theta}$, ou encore $e^{\ln(r)}e^{i\theta} = e^{\ln(r)+i\theta}$. La partie réelle donne la longueur, la partie complexe donne l'angle. Le théorème 2.4 s'obtient en dévelopant ce point de vue complexe, en calculant toutes les solutions complexes, puis en projetant aux solutions qui sont réelles, par une bonne annulation des composantes imaginaires dû aux deux racines conjuguées.

4 Systèmes non-linéaires en dimension 2 (et plus) : dynamique locale

Dans toute cette partie on s'intérèsse au problème (S) : $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ (en dimension quelconque).

Définition 4.1. *On appelle solution stationaire de (S) un nombre $\boldsymbol{y}^*$ tel que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^*) = 0$.*

4.1 Notions de stabilité

Définition 4.2. *On dit que $\boldsymbol{y}^*$ est stable si pour toute boule $B(\boldsymbol{y}^*, \varepsilon)$, centrée en $\boldsymbol{y}^*$ et de rayon ε (petit), il existe une boule $B(\boldsymbol{y}^*, r)$, centrée en $\boldsymbol{y}^*$ et de rayon r (éventuellement très petit) tel que pour tout $\boldsymbol{y}_0 \in B(\boldsymbol{y}^*, r)$, le problème de Cauchy*

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}),\ \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0\,,$$

est tel que, pour tout $t \geq t_0$, $\boldsymbol{y}(t) \in B(\boldsymbol{y}^*, \varepsilon)$.

Dans ce cas, on dit que les solutions $\mathbf{y}(t)$ "reste au voisinage" de l'équilibre $\mathbf{y}^*$ en tout temps. La définition suivante concerne les cas où les solutions se rapprochent de plus en plus de l'équilibre.

Définition 4.3. *On dit que $\boldsymbol{y}^*$ est localement asymptotiquement stable si il est stable et si il existe une boule $B(\boldsymbol{y}^*, r)$, centrée en $\boldsymbol{y}^*$ et de rayon r (éventuellement très petit) tel que pour tout $\boldsymbol{y}_0 \in B(\boldsymbol{y}^*, r)$, le problème de Cauchy*

$$\boldsymbol{y}' = f(\boldsymbol{y}),\ \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0\,,$$

est tel que $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}^*$.

Si cette dernière propriété est vrai quelque que soit la condition initiale, alors la stabilité est dite globale:

Définition 4.4. *On dit que la solution stationnaire $\boldsymbol{y}^*$ est globalement asymptotiquement stable si pour tout $\boldsymbol{y}_0$ (dans l'espace considéré pour les solutions du système), la solution du problème de Cauchy $\boldsymbol{y}' = f(\boldsymbol{y})$ $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$ vérifie $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}^*$.*

Enfin, la dernière définition est le cas inverse de la stabilité.

Définition 4.5. *On dit que $\boldsymbol{y}^*$ est instable s'il n'est pas stable: pour toute boule $B(\boldsymbol{y}^*, \varepsilon)$ (avec ε aussi petit que l'on veut), il existe $\boldsymbol{y}_0 \in B(\boldsymbol{y}^*, \varepsilon)$ et $t > 0$ tel que $\boldsymbol{y}(t) \notin B(\boldsymbol{y}^*, \varepsilon)$.*

4.2 Le critère de la linéarisation

4.2.1 Linéarisation en dimension 1

On se place dans un premier temps en dimension 1.

Théorème 4.1. *Soit le système $y' = f(y)$ et y^* une solution stationnaire (c'est à dire $f(y^*) = 0$). On a les deux critères suivants:*

- *Si $f'(y^*) < 0$, alors y^* est localement asymptotiquement stable*
- *Si $f'(y^*) > 0$, alors y^* est instable .*

On remarque que le théorème (4.1) ne dit rien dans le cas dit "dégénéré" où $f'(y^*) = 0$ (voir section 5.3). La preuve rigoureuse de ce théorème est compliqué, mais néanmoins on peut voir de deux manière différente que ce résultat est "vrai".

Idée de preuve - Approche spécifique à la dimension 1. Un première approches pour comprendre ce théorème est de considérer le plan de phase de f et remarquer que

- si $f'(y^*) < 0$, alors pour un intervalle $]y^* - r, y^* + r[$ (avec r éventuellement très petit), on a $f(y) > 0$ sur $]y^* - r, y^*[$ et $f(y) < 0$ sur $]y^*, y^* + r[$. Avec la méthodologie vue dans le chapitre 1.4 sur les EDO autonome de dimension 1, on en déduit que pour tout $y_0 \in]y^* - r, y^* + r[$, le problème de Cauchy
$$y' = f(y),\ y(t_0) = y_0\,,$$
est tel que $\lim_{t\to\infty} y(t) = y^*$.

- si $f'(y^*) > 0$, alors pour un intervalle $]y^* - r, y^* + r[$ (avec r éventuellement très petit), on a $f(y) < 0$ sur $]y^* - r, y^*[$ et $f(y) > 0$ sur $]y^*, y^* + r[$. Avec la méthodologie vue dans le chapitre 1.4 sur les EDO autonome de dimension 1, on en déduit que pour tout $y_0 \in]y^* - r, y^* + r[$, le problème de Cauchy
$$y' = f(y),\ y(t_0) = y_0\,,$$
est tel qu'il existe $t > t_0$ tel que $y(t) \notin]y^*, y^* + r[$.

□

Idée de preuve - Approche générique de la linéarisation. On écrit la solution du problème de Cauchy

$$y' = f(y),\ y(t_0) = y_0\,,$$

pour y_0 proche de y^*, sous la forme $y(t) = y^* + w(t)$. Ainsi, $w(t)$ représente la "perturbation" autour de y^*, et le théorème revient)à prouver que $w(t) \to 0$ dans le premier cas, et que $w(t)$ "devient grand" dans le deuxième cas. On montre que w vérifie le problème de Cauchy

$$(S_w)\ :\ w'(t) = f(y^* + w(t)), \quad w(0) = y_0 - y^*\,.$$

Ainsi, si $y(0) \approx y^*$ alors $w(0) \approx 0$. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz appliqué à (S_w), on sait que $w(t)$ est C^1 et donc, par continuité, reste petit pendant un temps τ.
Tant que $w(t)$ est faible, on peut écrire le dévellopement à l'ordre 1 de $f(y^* + w)$ ce qui donne donc

$$w'(t) = f(y^*) + w(t)f'(y^*) + reste$$

Comme y^* est une solution stationnaire, on a $f(y^*) = 0$, et ainsi, l'erreur w suit (approximativement[3]) l'équation différentielle linéaire
$$w'(t) = f'(y^*)w.$$
La solution est donc
$$w(t) = e^{f'(y^*)t}w(0).$$
Par conséquent,

- si $f'(y^*) < 0$, alors $w(t)$ tend vers 0 exponentiellement vite. On en déduit que l'approximation d'ordre 1 reste toujours vrai et donc que $y(t) \to y^*$.

- Si $f'(y^*) > 0$ alors $w(t)$ croit exponentiellement vite, et donc, au bout d'un certain temps, $y(t)$ n'est plus proche de y^* ce qui prouve l'instabilité.

□

[3] c'est ici que la preuve n'est pas rigoureuse. Pour une vrai preuve, il faut une expression plus précise du reste et montrer que sa présence ne modifie pas l'argument.

4.2.2 Linéarisation en dimension quelconque

Le théorème 4.1 se généralise en dimension quelconque grâce aux valeurs propres de la jacobienne de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{y}^*$. On rappelle que la jacobienne de $\mathbf{f}$ en un point $\mathbf{y}$, notée $J\mathbf{f}(\mathbf{y})$ est la matrice qui contient les dérivées partielles de $\mathbf{f}$ évaluées en le point $\mathbf{y}$. Ainsi, en dimension 2, si on réécrit le système (S) comme

$$y_1' = f_1(y_1, y_2)\,, \tag{51}$$
$$y_2' = f_2(y_1, y_2)\,, \tag{52}$$
$$\tag{53}$$

la jabobienne de $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ est

$$J\mathbf{f}(\mathbf{y}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\mathbf{y}^*) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(\mathbf{y}^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(\mathbf{y}^*) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(\mathbf{y}^*) \end{pmatrix} \tag{54}$$

Théorème 4.2. *Soit le système $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ et $\boldsymbol{y}^*$ une solution stationnaire (c'est à dire $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^*) = 0$). On a les deux critères suivants:*

- *Si toutes les valeurs propres de $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^*)$ ont une partie réelle strictement négative, alors $\boldsymbol{y}^*$ est localement asymptotiquement stable*

- *Si au moins une valeur propre de $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^*)$ a une partie réelle strictement positive, alors $\boldsymbol{y}^*$ est instable .*

A nouveau, on remarque que le théorème (4.1) ne dit rien dans le cas dit "dégénéré" lorsque toutes les valeurs propres de $J\mathbf{f}(\mathbf{y}^*)$ ont une partie réelle négative ou nulle, avec au moins une valeur propre de partie réelle nulle (voir section 5.3).

4.3 Cas dégénéré : le critère de Lyapunov

Lorsqu'on est en présence d'un cas dégénéré pour lequel le théorème 4.2 n'est pas conclusif, on peut essayer de trouver une fonction de Lyapunov V pour conclure à la stabilité locale. Le critère est le suivant (énoncé en dimension 2, mais valable en dimension quelconque):

Théorème 4.3. *Soit le système $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ et $\boldsymbol{y}^*$ une solution stationnaire (c'est à dire $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^*) = 0$). Si V est une fonction scalaire (e.g. $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$) qui vérifie*

- $V(\boldsymbol{y}^*) = 0$

- $V(\boldsymbol{y}) > 0$ *pour tout* $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{y}^*$.

- $\frac{d}{dt}V(\boldsymbol{y}) = \frac{\partial V}{\partial y_1}(\boldsymbol{y})f_1(\boldsymbol{y}) + \frac{\partial V}{\partial y_2}(\boldsymbol{y})f_2(\boldsymbol{y}) < 0$ *pour tout* $y \neq y^*$.

alors V est appelée une fonction de Lyapunov et $\boldsymbol{y}^*$ est localement asymptotiquement stable.

4.4 Méthodologie pratique

Le théorème 4.2 est très puissant et donne une méthodologie applicable dans de nombreux cas pour étudier la dynamique locale de systèmes dynamiques non-linéaires autonome. Dans ce cours, on se limite à la méthodologie en dimension 2 (mais le principe reste le même en plus grande dimension). Pour l'EDO (S) : $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ en dimension 2, que l'on peut réécrire

$$y_1' = f_1(y_1, y_2)\,, \tag{55}$$
$$y_2' = f_2(y_1, y_2)\,, \tag{56}$$
$$\tag{57}$$

avec $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, étudier la dynamique local revient à

1. Trouver toutes les solutions stationnaires, e.g. tous les points $\mathbf{y}^*$ tel que $\mathbf{f}(\mathbf{y}^*) = \mathbf{0}$.
2. Calculer la matrice jacobienne $\nabla\mathbf{f}(\mathbf{y})$ en un point $\mathbf{y}$ quelconque.
3. Pour chaque solution $\mathbf{y}^*$ identifiée à la première étape, évaluer la jabobienne en $\mathbf{y}^*$, $\nabla\mathbf{f}(\mathbf{y}^*)$.
4. Calculer les valeurs propres de $\nabla\mathbf{f}(\mathbf{y}^*)$ (via les racines du polynôme caractéristique associé à $\nabla\mathbf{f}(\mathbf{y}^*)$).
5. Essayer d'appliquer le théorème 4.2 pour chaque solution $\mathbf{y}^*$ identifiée à la première étape.
6. Si on est en présence d'un cas dégénéré pour un certain y^* (toutes les valeurs propres de $\nabla\mathbf{f}(\mathbf{y}^*)$ ont une partie réelle négative ou nulle, et au moins une valeur propre de partie réelle nulle), essayer de trouver une fonction de Lyapunov et appliquer le théorème 5.1.

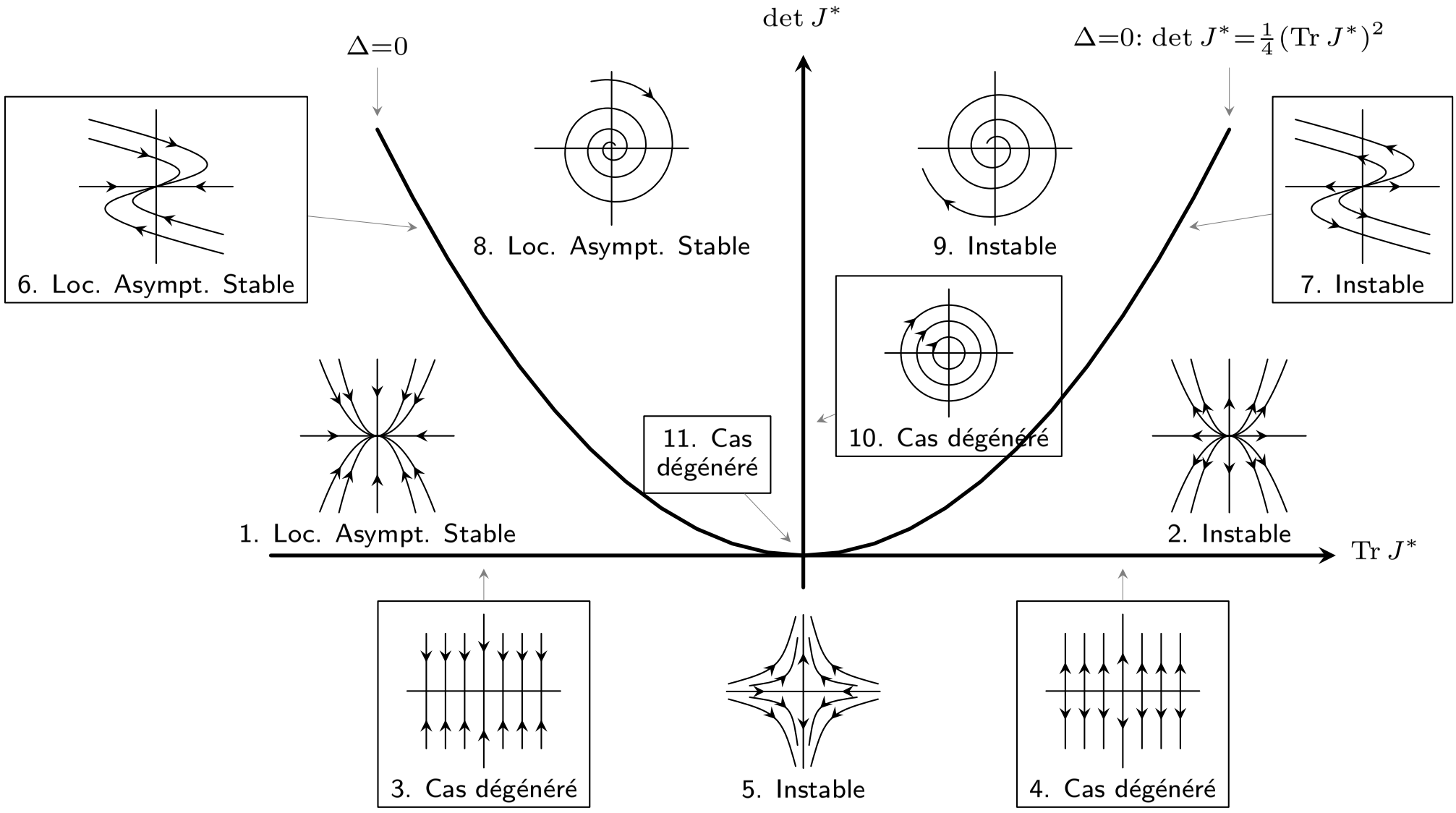
On résume l'ensemble des cas possibles par le diagramme de Poincaré "non-linéaire", analogue au cas linéaire. On note J^* la jacobienne $\nabla\mathbf{f}(\mathbf{y}^*)$. Selon les valeurs de $\det(J^*)$, $tr(J^*)$, on en déduit le signe des parties réelles des valeurs propres de J^* et la stabilité associé de la solution stationnaire. On se réfère à la numérotation de la section 2.8. On a alors

- Les cas 1,6,8 sont localement asymptotiquement stable
- Les cas 2,5,7,9 sont instable
- Les cas 3,4,10,11 sont dégénérés: on ne peut pas conclure.

On remarque en particulier (il n'est pas obligatoire en pratique de retenir ces critères):

- Si $tr(J^*) < 0$ ET $\det(J^*) > 0$, alors $\mathbf{y}^*$ est localement asymptotiquement stable.
- Si $tr(J^*) > 0$ OU $\det(J^*) < 0$ $\mathbf{y}^*$ est instable.

Diagramme de Poincaré: Classification de la stabilité dans le plan $(\det J^*, \mathrm{Tr}\, J^*)$



5 Systèmes non-linéaires en dimension 2 : dynamique globale

5.1 Représentation graphique en dimension 1

5.1.1 Le cas général - non autonome

On peut représenter le champ de vecteurs du système $y' = f(t, y)$ en tracant "en tout point" (t, y) du plan, le vecteur $(1, f(t, y))$. Le graphe d'une solution $y(t)$ est une courbe $(t, y(t))$ (voir TD 1).

5.1.2 Le cas autonome

Dans le cas autonome $y' = f(y)$. Les vecteurs $(1, f(y))$ ne dépendent pas du temps t. Ceci implique que les diverses trajectoires sont déduite à partir d'une simple translation horizontale de l'une d'entre elle, disons d'une trajectoires passant par $t = 0$.
Du point de vue physique, ceci signifie que les solutions du problème de cauchy $y' = f(y), y(t_0) = y_0$ et $y' = f(y), y(0) = y_0$ sont les même, quitte à décaller le temps de t_0.
autrement dit, les lois de la physique sont les même hier et aujourd'hui...
Dans ce cas, on trace en générale plutôt le graphe de f pour conclure "graphiquement" à la stabilité des points d'équilibre de l'EDO (voir section 4.2.1, et TD 1).

5.2 Représentation graphiques en dimension 2 - autonome

Pour le système

$$x' = f(x, y)\,, \tag{58}$$
$$y' = g(x, y)\,, \tag{59}$$
$$\tag{60}$$

on trace "en tout point" (x, y) du plan, le vecteur $(f(x, y), g(x, y))$. On remarque que le cas dimension 1 non-autonome est donc simplement de la dimension 2 où la deuxième équation est "$t' = 1$".
On superpose en général à ce champ de vecteur ce qu'on appelle les isoclines horizontales et verticales

Définition 5.1. *On appelle isocline horizontale l'ensemble des points $\boldsymbol{z} = (x, y)$ tels que*

$$g(x, y) = 0$$

Le long de l'isocline horizontale, le champ de vecteur $(f(x, y), g(x, y))$ est donc égale à $(f(x, y), 0)$, donc il est horizontale.

Définition 5.2. *On appelle isocline verticale l'ensemble des points $\boldsymbol{z} = (x, y)$ tels que*

$$f(x, y) = 0$$

Le long de l'isocline verticale, le champ de vecteur $(f(x, y), g(x, y))$ est donc égale à $(0, g(x, y))$, donc il est verticale.

Proposition 5.1. *Un point stationnaire vérifie $x' = y' = 0$ et est donc forcément à l'intersection d'une isocline pour x et d'une isocline pour y.*

Il est fortement conseillé de choisir un code graphique, par exemple un code couleur, pour les isoclines. Par exemple toujours tracer les isoclines pour x en bleue et celles pour y en rouge.
Les isoclines horizontales et verticales partagent le plan en régions (non forcément connexes) qui sont de quatre types :

- régions où f et g sont positifs : dans cette région les trajectoires se dirigent vers le haut et la droite ;

- régions où f est positif et g négatifs : dans cette région les trajectoires se dirigent vers le bas et la droite ;
- régions où f est négatif et g positifs : dans cette région les trajectoires se dirigent vers le haut et la gauche ;
- régions où f et g sont négatifs : dans cette région les trajectoires se dirigent vers le bas et la gauche ;

En complément de la méthodologie énoncée à la section 4.4, l'analyse graphique peut aider à "déduire" les comportements possibles du système. Il y a en particulier des situations classiques à repérer qui peuvent aider à partitionner les trajectoires (e.g. déterminer des régions du plan qui sont stable par le système dynamique), et qui généralise le principe "on ne franchit pas les équilibres" énoncés en dimension 1 à la section 1.3.

- **Si une isocline verticale ($dx/dt = 0$) est donnée par une droite verticale**, alors cette droite partitionne les trajectoires au sens où les demi-plans à droite et à gauche de cette droite sont stable par l'EDO. C'est à dire, si $\mathbf{z}_0$ est à droite de l'isocline, $\mathbf{z}(t)$ reste à droite de l'isocline pour tout temps. Si $\mathbf{z}_0$ est à gauche de cette droite, $\mathbf{z}(t)$ reste à gauche de cette droite pour tout temps. Egalement, une telle isocline verticale est stable par l'EDO: si $\mathbf{z}_0$ appartient à l'isocline verticale, alors $z(t)$ appartient à cette isocline en tout temps (on peut même sous partitionner cette isocline en fonction des croisement avec une isocline horizontale...)
- **Si une isocline pour y ($dy/dt = 0$) est donnée par une droite horizontale**, alors cette droite partitionne les trajectoires au sens où les demi-plans au-dessus et en-dessous de cette droite sont stable par l'EDO. C'est à dire, si $\mathbf{z}_0$ est au-dessus de cette droite, $z(t)$ reste au-dessus de cette droite pour tout temps. Si $\mathbf{z}_0$ est en-dessous de cette droite, $y(t)$ reste en-dessous de cette droite pour tout temps. Egalement, une telle isocline horizontale est stable par l'EDO: si $\mathbf{z}_0$ appartient à l'isocline horizontale, alors $z(t)$ appartient à cette isocline en tout temps (on peut même sous partitionner cette isocline en fonction des croisement avec une isocline verticale...)

Application directe et très importante: "on ne franchit pas les quarts de plans". *Soit le système dynamique*

$$x' = xf(x,y)\,, \tag{61}$$
$$y' = yg(x,y)\,, \tag{62}$$
$$\tag{63}$$

Alors chaque quart de plan est stable par ce système dynamique. En particulier, si $x(0) > 0$ et $y(0) > 0$, alors pour tout temps $t > 0$, on a $x(t) \geq 0$ et $y(t) \geq 0$. Voir Exo 1 TD 3.

5.3 Comportement global

Il y a très peu de méthodologie pour étudier le comportement global d'un système. Citons cependant le critère le plus utilisé, à l'aide d'une fonction de Lyapunov dite "coercitive". Le critère est le suivant (énoncé en dimension 2, mais valable en dimension quelconque):

Théorème 5.1. *Soit le système $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ et $\boldsymbol{y}^*$ une solution stationnaire (c'est à dire $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^*) = 0$). Si V est une fonction scalaire (e.g. $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$) qui vérifie*

- $V(\boldsymbol{y}^*) = 0$
- $V(\boldsymbol{y}) > 0$ *pour tout* $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{y}^*$.

- $\frac{d}{dt}V(\boldsymbol{y}) = \frac{\partial V}{\partial y_1}(\boldsymbol{y})f_1(\boldsymbol{y}) + \frac{\partial V}{\partial y_2}(\boldsymbol{y})f_2(\boldsymbol{y}) < 0$ *pour tout* $y \neq y^*$.

- $V(y) \to +\infty$ *dès que* y_1 *ou* y_2 *tend vers* $+\infty$ *ou* $-\infty$.

alors V *est appelée une fonction de Lyapunov coercitive et* $\boldsymbol{y}^*$ *est globalement asymptotiquement stable.*

5.4 Méthodologie pratique d'étude d'un système non-linéaire

On reprend et poursuit la méthodologie donnée en section 4.4. Pour l'EDO (S) : $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ en dimension 2, que l'on peut réécrire

$$y_1' = f_1(y_1, y_2)\,, \tag{64}$$
$$y_2' = f_2(y_1, y_2)\,, \tag{65}$$
$$\tag{66}$$

avec $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, étudier la dynamique du système revient à

1. Trouver toutes les solutions stationnaires, e.g. tous les points $\mathbf{y}^*$ tel que $\mathbf{f}(\mathbf{y}^*) = \mathbf{0}$.
2. Appliquer la méthodologie de l'étude locale par linéarisation à chaque point stationnaire (voir section 4.4).
3. Calculer les isoclines.
4. Partitionner le plan en fonction des isoclines, et déduire l'orientation du champ de vecteur dans chaque zone.
5. Identifier des zones du plan qui sont stables par le système dynamiques (i.e. les isoclines qu'on ne peut pas franchir).
6. En combinant l'étude locale et l'étude graphique, déterminer (si possible) le comportement global pour toutes les conditions initiales possibles.

5.5 Exemples

VOIR TD 3.