L2 Économie — Année 2026/2027

Module 2 - Outils Quantitatifs
Mathématiques pour l'Économiste 4

Fascicule d'exercices

Sten Madec

université de TOURS | Faculté de droit, économie & sciences sociales

Table des matières

Thème 1 - Généralités sur les suites ; suite récurrentes linéaires d'ordre 1 **4**
Thème 2 - Suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ **9**
Thème 3 - Equations récurrentes en dimension p **12**
Thème 4 - Équations différentielles linéaires d'ordre 1 **16**
Thème 5 - Équations différentielles non linéaires d'ordre 1 **19**
Thème 6 - Equations différentielles en dimension p **21**

Généralités sur les suites ; suite récurrentes linéaires d'ordre 1

Exercice 1 (À préparer pour le CM2).
Soient α, β et γ 3 réels strictement positifs.
On considère les 4 suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes généraux sont :

$$a_n = \frac{n-1}{n+1}\,; \quad b_n = 5^n - \alpha^n\,; \quad c_n = 1 + \frac{\beta - 1}{n} \quad d_n = \left(\frac{1+\gamma}{2}\right)^n.$$

1. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle minorée ? majorée ? bornée ?

   $n-1 < n+1$ donc $a_n < 1$ ainsi la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée (par 1, entre autres).
   Si $n \geqslant 1$, on a $n-1 \geqslant 0$ et $n+1 > 0$ donc $a_n \geqslant 0$. De plus $a_0 = -1$ donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée (par -1, entre autres).
   En conclusion la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

2. Déterminer selon la valeur de α les cas où la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, les cas où elle est majorée, puis les cas où elle est bornée.

   Le comportement de la suite va dépendre de la position de α par rapport à 5.

   - Cas où $\alpha = 5$. Alors la suite est constante égale à 0. Ainsi elle est majorée par 0, minorée par 0 et a fortiori bornée.
   - Cas où $\alpha < 5$. On a $5^n \geqslant \alpha^n$, pour tout entier naturel n, donc, pour tout entier naturel n, on a $b_n \geqslant 0$. Ainsi la suite est minorée par 0.
     De plus on a $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 5^n\left(1 - \left(\frac{\alpha}{5}\right)^n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$. Donc la suite n'est pas majorée. Ainsi elle n'est pas bornée.
   - Cas où $\alpha > 5$. On a $5^n \leqslant \alpha^n$, pour tout entier naturel n, donc, pour tout entier naturel n, on a $b_n \leqslant 0$. Ainsi la suite est majorée par 0.
     De plus on a $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha^n\left(\left(\frac{5}{\alpha}\right)^n - 1\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} -\alpha^n = -\infty$. Donc la suite n'est pas minorée. Ainsi elle n'est pas bornée.

3. Déterminer, éventuellement selon le valeur de β, le sens de variation de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   Soient n dans $\mathbb{N}^\star$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$,

   $$c_{n+1} - c_n = 1 + \frac{\beta-1}{n+1} - \left(1 + \frac{\beta-1}{n}\right) = \frac{\beta-1}{n+1} - \frac{\beta-1}{n} = (\beta-1)\frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = \frac{1-\beta}{n(n+1)}$$

   Ainsi si $\beta < 1$, la suite est strictement croissante. Si $\beta > 1$, la suite est strictement décroissante. Si $\beta = 1$, la suite est constante égale à 1.

4. Déterminer, éventuellement selon le valeur de γ, le sens de variation de $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   On reconnaît la forme d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1+\gamma}{2}$. Pour connaître son sens de variation, il faut comparer la raison à 1.

   - si $\gamma = 1$, alors la raison vaut 1 et la suite est constante.
   - Si $\gamma > 1$, alors la raison est également strictement supérieur à 1 et la suite est strictement croissante (car son premier terme est positif).
   - Si $\gamma < 1$, alors la raison est strictement inférieure à 1 mais aussi strictement positive donc la suite est strictement décroissante (car son premier terme est positif).

Sinon on peut classiquement étudier la différence entre deux termes consécutifs.

$$d_{n+1}-d_n=\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)^n=\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)^n\left(\frac{1+\gamma}{2}-1\right)=\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)^n\left(\frac{1+\gamma-2}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)^n\times 2\times(\gamma-1)$$

On a $\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)^n\times 2>0$ donc le sens de variation dépend du signe de $\gamma-1$.

- Si $\gamma>1$, alors $\gamma-1>0$, est la suite est strictement croissante.
- Si $\gamma=1$, alors $\gamma-1=0$, est la suite est constante.
- Si $\gamma<1$, alors $\gamma-1<0$, est la suite est strictement décroissante.

Exercice 2 (À préparer pour le TD1).
Soit a un réel quelconque.
On considère les 4 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes généraux sont :

$$u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\ ;\quad v_n=\frac{n^2}{n!}\ ;\quad w_n=(a-2)n\quad x_n=(n-10)^2.$$

Étudier les variations de ces 4 suites, éventuellement selon la valeur du paramètre a.

- Pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n<u_n$ (car $u_n>0$, pour tout entier naturel n).
  Donc la suite est strictement décroissante.
- $v_{n+1}-v_n=\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}-\frac{n^2}{n!}=\frac{(n+1)^2-n^2(n+1)}{(n+1)!}=\frac{n+1-n^2}{n!}=\frac{-n^2+n+1}{n!}$
  $v_{n+1}-v_n<0$ dès que $n\geqslant 2$, donc à partir du rang 2 la suite est strictement décroissante.
- Pour étudier les variations de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut se reposer sur les variations de la fonction $f:x\mapsto(a-2)x$. La fonction f est monotone et son sens de variation dépend du signe de $a-2$.
  Si $a>2$, alors $a-2>0$. Dans ce cas la fonction f et a fortiori la suite sont strictement croissantes.
  Si $a=2$, alors $a-2=0$. Dans ce cas la fonction f et a fortiori la suite sont constantes égales à 0.
  Si $a<2$, alors $a-2<0$. Dans ce cas la fonction f et a fortiori la suite sont strictement décroissantes.
- $x_{n+1}-x_n=(n+1-10)^2-(n-10)^2=n^2-18n+81-n^2+20n-100=2n-19=2\left(n-\frac{19}{2}\right)$
  Donc la suite est strictement décroissante jusqu'au rang $n=10$, puis strictement croissante à partir du rang $n=10$.

Exercice 3 (À préparer pour le TD1).
Déterminer la limite (éventuelle) des suites de terme général :

1. $n(-1)^n$;

   On pose $v_n=n(-1)^n$. On a $u_{2n}=2n\to+\infty$ et $u_{2n+1}=-2n-1\to-\infty$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet deux sous-suites ayant des limites différentes, elle n'admet donc pas de limite. Cette suite diverge.

2. $\frac{(-1)^n}{n}$;

   On pose $w_n=\frac{(-1)^n}{n}$. On a $u_{2n}=\frac{1}{2n}\to 0$ et $u_{2n+1}=-\frac{1}{2n+1}\to 0$. Les termes de la suite (w_n) sont entièrement contenant dans deux sous-suites ayant la même limite. (w_n) converge donc vers la limite unique de ses sous-suites.

3. $3\times(-2)^n$;

   On pose $u_n=3\times(-2)^n$. On a $u_{2n}=3\times 4^n\to+\infty$ et $u_{2n+1}=-3\times 2^{2n+1}\to-\infty$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet deux sous-suites ayant des limites différentes, elle n'admet donc pas de limite. Cette suite diverge.

4. $\dfrac{\cos(n)}{n}$;

   $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$ donc $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\cos(n)}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(n)}{n} = 0$ par encadrement.

5. $n^{\frac{1}{\ln(n)}}$.

   $n^{\frac{1}{\ln(n)}} = \exp\left(\ln(n)\dfrac{1}{\ln(n)}\right) = e^1 = e$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{\ln(n)}} = e$

Exercice 4.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \dfrac{(-a)^n + 1}{1 + a^{n+1}}$.

1. On s'intéresse à la sous-suite extraite des indices de rang pair : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_n = u_{2n}$, pour tout entier naturel n.
   (a) Exprimer le terme général de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   $v_n = u_{2n} = \dfrac{(-a)^{2n} + 1}{1 + a^{2n+1}} = \dfrac{a^{2n} + 1}{1 + a^{2n+1}} = \dfrac{1}{a} \times \dfrac{1 + \frac{1}{a^{2n}}}{\frac{1}{a^{2n+1}} + 1}$

   (b) Déterminer, en fonction de a, si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite et si oui, déterminer sa limite.

   Si $a > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{a}$.
   Si $a = 1$, on a $v_n = 1$ pour tout entier n, ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.
   Si $0 < a < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

2. On s'intéresse à la sous-suite extraite des indices de rang impair : $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $w_n = u_{2n+1}$, pour tout entier naturel n.
   (a) Exprimer le terme général de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   $w_n = u_{2n+1} = \dfrac{(-a)^{2n+1} + 1}{1 + a^{2n+1+1}} = \dfrac{-a^{2n+1} + 1}{1 + a^{2n+2}} = \dfrac{1}{a} \times \dfrac{-1 + \frac{1}{a^{2n+1}}}{\frac{1}{a^{2n+2}} + 1}$

   (b) Déterminer, en fonction de a, si la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite et si oui, déterminer sa limite.

   Si $a > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\dfrac{1}{a}$.
   Si $a = 1$, on a $w_n = 0$ pour tout entier n, ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.
   Si $0 < a < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$.

3. Préciser pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}_+^*$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

   Si $a >= 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} \neq \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite, donc elle n'admet pas de limite finie, elle n'est donc pas convergente.
   Si $0 < a < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} \neq \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 1$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet donc une limite finie (1), ainsi elle est convergente.

Exercice 5.

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 > 0$ et, pour tout entier n, on a $0 < u_{n+1} \leqslant 2 - \dfrac{1}{u_n}$.

1. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, on a $2 - \dfrac{1}{x} \leqslant x$.

   On pose, pour tout réel $x > 0$, $f(x) = x + \dfrac{1}{x} - 2$.

   Cette fonction est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée vaut $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$. Cette dérivée est strictement positive sur $]0; 1[$ et strictement négative sur $]1; +\infty[$.
   La fonction f admet donc un minimum en 1. De plus $f(1) = 0$. Donc on a, pour tout réel $x > 0$, $f(x) \geqslant 0$. Ce dernier résultat est équivalent à l'inégalité qu'il fallait montrer.

2. En déduire le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   $u_0 > 0$ et pour tout entier n, on a $u_{n+1} > 0$ donc d'après la question précédente, $u_{n+1} \leqslant 2 - \dfrac{1}{u_n} \leqslant u_n$.
   Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 0) donc elle converge.

4. (*) On note ℓ sa limite. Déduire de l'inégalité $0 < u_{n+1} \leqslant 2 - \dfrac{1}{u_n}$, pour tout entier n, des conséquences sur ℓ et conclure.

   Pour tout entier naturel n, on a $0 < u_{n+1} \leqslant 2 - \dfrac{1}{u_n} \leqslant u_n$. On a donc

   $$0 \leqslant \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} \leqslant \lim_{n\to+\infty} 2 - \frac{1}{u_n} \leqslant \lim_{n\to+\infty} u_n$$

   Si $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$, on obtient $0 \leqslant -\infty \leqslant 0$ ce qui est impossible donc $\ell \neq 0$ et l'inégalité précédente donne :

   $$\ell \leqslant 2 - \frac{1}{\ell} \leqslant \ell$$

   d'où $\ell = 2 - \dfrac{1}{\ell} \iff \ell^2 - 2\ell + 1 = 0$ et $\ell \neq 0 \iff (\ell - 1)^2 = 0 \iff \ell = 1$
   Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

Exercice 6.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et strictement positive.

   On le montre par récurrence sur n dans $\mathbb{N}$: H_n « u_n est bien défini et $u_n > 0$ ».
   - Initialisation : $u_0 = 1 > 0$.
   - Hérédité : soit n dans $\mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$. Alors $1 + u_n \neq 0$ donc u_{n+1} est bien défini. De plus $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n} > 0$.
   - Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et est strictement positive.

2. Calculer les premiers termes et déterminer si la suite est arithmétique.

   $u_0 = 1$, $u_1 = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{1}{3}$.
   La suite n'est pas arithmétique car la différence entre deux termes consécutifs n'est pas constante.

3. On considère alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Justifier la bonne définition de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Puis montrer qu'il s'agit d'une suite arithmétique et déterminer son terme général en fonction de n.

   On a montrer précédemment que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs strictement positives donc $u_n \neq 0$, pour tout entier naturel n. Donc le quotient $\dfrac{1}{u_n}$ est bien défini pour tout entier naturel n. Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1 + u_n}{u_n} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{u_n}{u_n} = 1$
   Ainsi $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 1. De plus, $v_0 = \dfrac{1}{u_0} = \dfrac{1}{1}$. Donc, pour tout entier naturel n, on a $v_n = n + 1$.

4. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

   Pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 7.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n+1}{2u_n+4}$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est défini et vérifie $u_n > 0$.

   On pose, pour tout entier n positif, H_n : « u_n est bien défini et $u_n > 0$ ».
   - Initialisation : $u_0 = 1$ donc u_0 est bien défini et est strictement supérieur à 0. $u_n > 0 \Rightarrow 2u_n + 4 \neq 0$ ainsi u_{n+1}est bien défini.
     $u_n > 0 \Rightarrow 3u_n + 1 > 0$ et $2u_n + 4 > 0 \Rightarrow u_n n + 1 > 0$. Donc si H_n est vraie, H_{n+1} l'est aussi.
   - Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et tous ses termes sont strictement positifs.

2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{2u_n-1}{u_n+1}$ est bien définie et est géométrique.

   Comme pour tout entier naturel n, $u_n > 0$, on n'a jamais $u_n + 1 = 0$ donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   De plus, pour tout entier naturel n,
   $v_{n+1} = \dfrac{2u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \dfrac{2\frac{3u_n+1}{2u_n+4}-1}{\frac{3u_n+1}{2u_n+4}+1} = \dfrac{\frac{6u_n+2-2u_n-4}{2u_n+4}}{\frac{3u_n+1+2u_n+4}{2u_n+4}} = \dfrac{4u_n-2}{5u_n+5} = \dfrac{2(2u_n-1)}{5(u_n+1)} = \dfrac{2}{5}v_n.$
   Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{2u_0-1}{u_0+1} = \dfrac{1}{2}$.

3. En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de u_n en fonction de n.

$$v_n = \frac{2u_n-1}{u_n+1} \Leftrightarrow v_n u_n + v_n = 2u_n - 1 \Leftrightarrow (v_n-2)u_n = -1 - v_n$$

   Or, pour entier n positif, on a $0 < v_n \leqslant \dfrac{1}{2}$ car $v_0 = \dfrac{1}{2}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (suite géométrique de raison strictement comprise entre 0 et 1). Donc $v_n - 2 \neq 0$. Ainsi

$$u_n = \frac{v_n+1}{2-v_n} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1}{2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{2^{n-1}+5^n}{2\times 5^n - 2^{n-1}}.$$

   Et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 8.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+2} = \dfrac{3}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n$.

1. Montrer que la suite de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$ est une suite géométrique. Exprimer v_n en fonction de n.

   $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \dfrac{3}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n - u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n = \dfrac{1}{2}v_n$
   $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1$. Ainsi on a $v_n = \dfrac{1}{2^n}$, pour tout entier naturel n.

2. En déduire une expression de u_{n+1} en fonction de u_n et n.

   $u_{n+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + u_n$

3. Montrer par récurrence que, pour tout entier n strictement positif, on a $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$.

4. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

   Ainsi $u_n = \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right) = 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bornée ? monotone ? convergente ?

   Sous cette forme on remarque que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$. Comme elle converge, elle est forcément bornée. Sous sa forme en somme, on constate que la suite est croissante. Elle est donc majorée par sa limite 2 et minorée par son premier terme $u_0 = 0$.

Exercice 9.
On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par

$$(S) : \begin{cases} u_0 &= 6, \\ u_{n+1} &= \dfrac{1}{3}u_n + 2 \quad (E) \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation de récurrence homogène associée à (E).

   Ce sont les suites géométriques de raison $\dfrac{1}{3}$.

2. Déterminer une suite constante vérifiant la relation de récurrence (E).

   Soit k un réel. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante égale à k.
   $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $(E) \iff v_{n+1} = \dfrac{1}{3}v_n + 2, \forall n \in \mathbb{N}$
   $\iff k = \dfrac{1}{3}k + 2 \iff \dfrac{2}{3}k = 2 \iff k = 3$
   On trouve donc que la suite constante égale à 3 vérifie (E).

3. En déduire l'ensemble des suites solutions de l'équation de récurrence (E).

   Les suites vérifiant (E) sont les suites dont le terme général est de la forme $u_n = \lambda\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 3$, pour tout entier naturel n, avec λ un réel quelconque.

4. Déterminer l'unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant (S).

   Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (E) alors il existe un réel λ tel que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = \lambda\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 3$.
   Or $6 = u_0 = \lambda\left(\dfrac{1}{3}\right)^0 + 3 \iff 6 = \lambda + 3 \iff \lambda = 3$
   Donc l'unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant (S) a pour terme général $u_n = 3\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 3$, pour tout entier naturel n.

5. Déterminer la nature de la suite. Si elle admet une limite, quelle est sa valeur ?

   On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 + 3 = 3$ donc la suite converge vers 3.

6. Si la valeur du terme initial u_0 change, est-ce que la nature de la suite change ? Si une limite existe, est-ce que sa valeur change ?

   La seule limite possible est 3 car c'est le seul état d'équilibre du système. De plus comme $a = \dfrac{1}{3}$, on a $|a| < 1$ et donc la suite converge forcément. Ainsi peu importe la valeur de u_0, la suite converge vers 3.

Exercice 10.
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{N}$ par

$$(E) : u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2\,(-1)^n\,.$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation de récurrence homogène associée à (E).

   Ce sont les suites géométriques de raison $\frac{1}{2}$.

2. Déterminer une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général de la forme $v_n = \alpha\,(-1)^n$, pour tout entier naturel n vérifiant la relation de récurrence (E).

   Soit α un réel. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général de la forme $v_n = \alpha\,(-1)^n$, pour tout entier naturel n.
   $$\begin{aligned}(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ vérifie } (E) &\iff v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 2(-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}\\ &\iff \alpha\,(-1)^{n+1} = \frac{1}{2}\alpha\,(-1)^n + 2\,(-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}\\ &\iff \alpha\,(-1) = \frac{1}{2}\alpha + 2 \iff -\frac{3}{2}\alpha = 2 \iff \alpha = -\frac{4}{3}\end{aligned}$$
   Donc la suite de terme général $v_n = -\frac{4}{3}\,(-1)^n$ vérifie (E).

3. En déduire l'ensemble des suites solutions de l'équation de récurrence (E).

   Les suites vérifiant (E) sont les suites dont le terme général est de la forme $u_n = \lambda\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3}\,(-1)^n$, pour tout entier naturel n, avec λ un réel quelconque.

4. Exprimer en fonction de u_0 le terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant (E).

   On a $u_0 = \lambda\left(\frac{1}{2}\right)^0 - \frac{4}{3}\,(-1)^0$, c'est-à-dire $u_0 = \lambda - \frac{4}{3}$ donc $\lambda = u_0 + \frac{4}{3}$.
   Ainsi on a $u_n = \left(u_0 - \frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3}\,(-1)^n$, pour tout entier naturel n.

5. Déterminer la nature de la suite et sa limite éventuelle.

   On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_0 - \frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ mais la partie $-\frac{4}{3}\,(-1)^n$ n'admet pas de limite (voir les sous-suites extraites d'indices pairs et impairs). Donc les suites vérifiant (E) sont divergentes car elles n'admettent pas de limite.

Exercice 11.
En suivant le schéma des exercices précédents, étudier les suites suivantes pour a un nombre réel quelconque :

$$\begin{cases} u_0 &= a,\\ u_{n+1} &= 2u_n - 5.\end{cases}, \quad \begin{cases} u_0 &= a,\\ u_{n+1} &= -3u_n + 1\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 &= a,\\ u_{n+1} &= -\frac{1}{2}u_n + 3.\end{cases}$$

Pour la première suite :
On a $u_n = 2^n\,(u_0 - 5) + 5$. On a donc

- Si $u_0 > 5$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
- Si $u_0 < 5$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.
- Si $u_0 = 5$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 5.

Pour la deuxième suite : $\begin{cases} u_0 &= a,\\ u_{n+1} &= -3u_n + 1\end{cases}$

Solution particulière constante : $k = -3k + 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{4}$

Expression du terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $u_n = \left(a - \frac{1}{4}\right) \times (-3)^n + \frac{1}{4}$

Conclusion : Si $a = \frac{1}{4}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $\frac{1}{4}$. Si $a \neq \frac{1}{4}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite car parmi la sous-suite des termes de indices pairs et la sous-suite des termes des indices impaires, l'une va admettre pour limite $+\infty$ et l'autre $-\infty$.

Pour la troisième suite : $\begin{cases} u_0 &= a, \\ u_{n+1} &= -\frac{1}{2}u_n + 3. \end{cases}$

Solution particulière constante : $k = \frac{1}{2}k + 3 \Leftrightarrow k = 2$

Expression du terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $u_n = (a-2) \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2$

Conclusion : Si $a = 2$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 2. Si $a \neq 2$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.

Exercice 12.

Déterminer les solutions des équations de récurrence suivantes avec condition initiale.

1. $u_{n+1} - 2u_n = 4n - 7$ avec $u_0 = 1$;

   Le second membre est de forme polynomiale donc on va chercher une solution particulière de terme général de la forme $v_n = an + b$.
   $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $(E) \iff v_{n+1} - 2v_n = 4n - 7, \forall n \in \mathbb{N}$
   $\iff a(n+1) + b - 2(an+b) = 4n - 7, \forall n \in \mathbb{N} \iff an + a + b - 2ab - 2b = 4n - 7, \forall n \in \mathbb{N}$
   $\iff -an + a - b = 4n - 7, \forall n \in \mathbb{N}$
   $\iff \begin{cases} -a = 4 \\ a - b = -7 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -4 \\ b = 3 \end{cases}$
   Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = -4n + 3$ vérifie (E).
   En ajoutant la forme des solutions de l'équation homogène associée, on a

   $$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \lambda 2^n - 4n + 3 \end{array} \; ; \; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

   Cherchons maintenant l'unique suite vérifiant également la condition initiale $u_0 = 1$. Le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme $u_n = \lambda 2^n - 4n + 3$ pour tout entier naturel n.
   Donc $u_0 = \lambda 2^0 - 4 \times 0 + 3 = \lambda + 3 = 1 \iff \lambda = -2$.
   Ainsi l'unique suite vérifiant la relation de récurrence et la condition initiale est la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = -2 \times 2^n - 4n + 3$, pour tout entier n.

2. $3u_{n+1} + 2u_n = 10$ avec $u_0 = 1$;

   Commençons par réécrire la relation de récurrence sous une forme plus classique : $u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + \frac{10}{3}$.
   Le second membre est constant donc on va chercher une solution particulière de terme général constant : $v_n = k$.
   $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $(E) \iff 3v_{n+1} + 2v_n = 10, \forall n \in \mathbb{N} \iff 3k + 2k = 10 \iff 5k = 10 \iff k = 2$
   Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = 2$ vérifie (E).
   En ajoutant la forme des solutions de l'équation homogène associée, on a

   $$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \lambda \left(-\frac{2}{3}\right)^n + 2 \end{array} \; ; \; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

   Cherchons maintenant l'unique suite vérifiant également la condition initiale $u_0 = 1$. Le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme $u_n = \lambda \left(-\frac{2}{3}\right)^n + 2$ pour tout entier naturel n.
   Donc $u_0 = \lambda \left(-\frac{2}{3}\right)^0 + 2 = \lambda + 2 = 1 \iff \lambda = -1$.

Ainsi l'unique suite vérifiant la relation de récurrence et la condition initiale est la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = -\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 2$, pour tout entier n.

3. $3u_{n+1} + 2u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $u_0 = 0$;

Commençons par réécrire la relation de récurrence sous une forme plus classique : $u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
On va chercher une solution particulière de terme général de la forme : $v_n = a\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$$\begin{aligned}(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ vérifie } (E) &\iff 3v_{n+1} + 2v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N} \\ &\iff 3a\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 2a\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N} \\ &\iff \frac{3}{2}a + 2a = 1 \iff \frac{7}{2}a = 1 \iff a = \frac{2}{7}\end{aligned}$$

Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = \frac{2}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ vérifie (E).
En ajoutant la forme des solutions de l'équation homogène associée, on a

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \lambda\left(-\frac{2}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{array} ;\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Cherchons maintenant l'unique suite vérifiant également la condition initiale $u_0 = 0$. Le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme $u_n = \lambda\left(-\frac{2}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout entier naturel n.
Donc $u_0 = \lambda\left(-\frac{2}{3}\right)^0 + \frac{2}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \lambda + \frac{2}{7} = 0 \iff \lambda = -\frac{2}{7}$.
Ainsi l'unique suite vérifiant la relation de récurrence et la condition initiale est la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = -\frac{2}{7}\left(-\frac{2}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n$, pour tout entier n.

4. $3u_{n+1} + 2u_n = 10 + 14\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $u_0 = 2$.

On constate que le second membre est une combinaison linéaire des seconds memebres des deux questions précédentes (et que le reste est identique). Donc on va obtenir aisément une solution particulière grâce au théorème de superposition. Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = 2 + 14 \times \frac{2}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ vérifie la relation de récurrence.
On obtient donc

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \lambda\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{array} ;\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Cherchons maintenant l'unique suite vérifiant également la condition initiale $u_0 = 2$. Le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme $u_n = \lambda\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout entier naturel n.
Donc $u_0 = \lambda\left(-\frac{2}{3}\right)^0 + 2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \lambda + 2 + 4 = 2 \iff \lambda = -4$.
Ainsi l'unique suite vérifiant la relation de récurrence et la condition initiale est la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = -4\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$, pour tout entier n.

Exercice 13.
On note p_n le prix de l'année n d'un produit donné. La quantité demandée dépend de ce prix selon la relation $D_n = 220 - 0.4p_n$, alors que la quantité produite dépend du prix de l'année précédente selon la relation $P_n = 0.6p_{n-1} - 30$. On suppose qu'en 2000 on a fixé le prix à 245 euros et que, chaque année, l'offre est égale à la demande.

1. Donner une relation entre p_n et p_{n+1}.

   $D_n = P_n \Leftrightarrow 220 - 0.4p_n = 0.6p_{n-1} - 30 \Leftrightarrow p_n = -1.5p_{n-1} + 625$
   Donc pour tout entier n positif, on a $p_{n+1} = -1.5p_n + 625$.

2. En déduire une expression de p_n en fonction de n.

   On cherche une solution particulière sous forme de suite constante :
   $k = -1.5k + 625 \iff 2.5k = 625 \iff k = 250$
   Le suites vérifiant le relation homogène associée sont les suites géométriques de raison -1.5.
   On en déduit qu'il existe un réel λ tel que $p_n = (-1.5)^n \times \lambda + 250$, pour tout entier naturel n.
   On peut exprimer λ en fonction du terme initial cela nous donne : $p_n = (-1.5)^n(p_0 - 250) + 250$, pour tout entier naturel n.

3. Étudier le comportement à long terme de la suite (p_n).
   Y a-t-il un prix d'équilibre possible ?

   Si $p_0 \neq 250$, la suite oscille sans admettre de limite. On peut regarder les suites de rang pair et de rang impair. Donc aucun prix d'équilibre n'est possible sauf si le prix initial est déjà le prix d'équilibre 250.

Exercice 14.
Dans un modèle économique, pour l'année n, on note C_n la consommation, Y_n le revenu, I_n l'investissement et G les dépenses gouvernementales d'un pays (G ne dépend pas de n). Ces quantités sont reliées par les équations suivantes :

$$\begin{cases} C_n - 0.9Y_n &= b \\ I_n - 0.09Y_n &= 0.002Y_{n-1} + e \\ -C_n - I_n + Y_n &= G \end{cases}$$

1. Déterminer l'équation reliant Y_n à Y_{n+1}.

   On a $C_n = 0.9Y_n + b$ et $I_n = 0.09Y_n + 0.002Y_{n-1} + e$.
   En remettant cela dans la troisième équation, on obtient :

$$\begin{aligned} -0.9Y_n - b - 0.09Y_n - 0.002Y_{n-1} - e + Y_n = G &\Leftrightarrow 0.01Y_n - 0.002Y_{n-1} = G + b + e \\ &\Leftrightarrow Y_n = 0.2Y_{n-1} + 100(G + b + e) \end{aligned}$$

2. Étudier, en fonction de b, e et G, l'évolution de la suite (Y_n).

   Solution particulière constante : $k = 125(G + b + e)$
   On obtient $Y_n = (0.2)^n(Y_0 - k) + k = 0.2^n(Y_0 - 125(G+b+e)) + 125(G+b+e)$, pour tout entier naturel n.
   $|0.2| < 1$ donc la suite est convergente.
   De plus, $0.2 > 0$ donc il n'y a pas d'oscillation et la suite est monotone.
   On a $\lim\limits_{n\to+\infty} Y_n = 125(G + b + e)$.
   Si $Y_0 > 125(G + b + e)$, la suite converge en étant strictement décroissante.
   Si $Y_0 < 125(G + b + e)$, la suite converge en étant strictement croissante.
   Si $Y_0 = 125(G + b + e)$, la suite est constante.

Exercice 15.
On considère le marché d'un bien de prix p_t pour lequel l'offre S_t et la demande D_t vérifient les relations :

$$\begin{cases} S_t &= -30 + ap_{t-1} \\ D_t &= 70 - 2p_t \end{cases}$$

où a est un nombre réel strictement positif et t un nombre entier positif ou nul quelconque.

1. Dans l'hypothèse d'un ajustement de l'offre sur la demande, déterminer la relation qui lie le prix p_t (à la période t) au prix p_{t-1} (à la période $t-1$).

   $S_t = D_t \Leftrightarrow -30 + ap_{t-1} = 70 - 2p_t \Leftrightarrow p_t = 50 - \frac{a}{2}p_{t-1}$

2. Déterminer le prix à l'équilibre p_e.

   Cela correspond à la limite possible et à la valeur de la suite particulière constante. $p_e = 50 - \frac{a}{2}p_e \Leftrightarrow \left(1 + \frac{a}{2}\right)p_e = 50 \Leftrightarrow \frac{2+a}{2}p_e = 50 \Leftrightarrow p_e = \frac{100}{2+a}$

3. Déterminer le terme général de la suite $(p_t)_{t\in\mathbb{N}}$.

   $p_t = \left(-\frac{a}{2}\right)^t (p_0 - p_e) + p_e = \left(-\frac{a}{2}\right)^t \left(50 - \frac{100}{2+a}\right) + \frac{100}{2+a}$

4. Étudier le comportement de la suite $(p_t)_{t\in\mathbb{N}}$, en fonction de la valeur de a, lorsque le prix initial est $p_0 = 50$.

   Si $a = 2$, la suite alterne entre $p_0 = 50$ et $2p_e - p_0 = 0$.
   Si $a > 2$, la suite oscille en explosant.
   Si $0 < a < 2$, alors la suite tend vers son point d'équilibre $\frac{100}{2+a}$, en oscillant.

Exercice 16.
Soit m un réel.

On considère l'équation de récurrence (E) : $5u_{t+1} + mu_t = \frac{2}{5^t}$, pour tout entier naturel t

1. Déterminer les suites vérifiant l'équation homogène associée à (E).

   $(E) \iff u_{t+1} = -\frac{m}{5}u_t + \frac{2}{5^{t+1}}, \forall t \in \mathbb{N}$
   On a donc

$$\mathcal{S}_H = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \lambda\left(-\frac{m}{5}\right)^n \end{array} ; \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

2. Déterminer une suite particulière vérifiant (E) éventuellement en faisant des cas selon la valeur de m.

   On va commencer par chercher une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ solution particulière de terme général de la forme $v_n = a\frac{1}{5^n}$.

   $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $(E) \iff 5v_{n+1} + mv_n = \frac{2}{5^n}, \forall n \in \mathbb{N}$
   $\iff 5a\frac{1}{5^{n+1}} + ma\frac{1}{5^n} = \frac{2}{5^n}, \forall n \in \mathbb{N}$
   $\iff 5a\frac{1}{5} + ma = 2 \iff a(1+m) = 2$

   Donc si $m \neq -1$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = \frac{2}{m+1} \times \frac{1}{5^n}$ vérifie (E).
   Il n'existe pas de solution particulière de cette forme quand $m = -1$. Dans ce cas, on cherchera une solution particulière $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général de la forme $w_n = an\frac{1}{5^n}$.

   $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $(E) \iff 5w_{n+1} - w_n = \frac{2}{5^n}, \forall n \in \mathbb{N}$
   $\iff 5a(n+1)\frac{1}{5^{n+1}} - an\frac{1}{5^n} = \frac{2}{5^n}, \forall n \in \mathbb{N}$
   $\iff an + a - an = 2, \forall n \in \mathbb{N} \iff a = 2$

   Donc si $m = -1$, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $w_n = \frac{2n}{5^n}$ vérifie (E).

3. Exprimer l'ensemble des solutions de (E).

Si $m=-1$, on a $\mathcal{S}=\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{N}&\to&\mathbb{R}\\ n&\mapsto&\dfrac{2n+\lambda}{5^n}\end{array}\ ;\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}$.

Si $m\neq -1$, on a $\mathcal{S}=\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{N}&\to&\mathbb{R}\\ n&\mapsto&\lambda\left(-\dfrac{m}{5}\right)^n+\dfrac{2}{m+1}\times\dfrac{1}{5^n}\end{array}\ ;\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}$

4. Existe-il des valeurs du paramètre m pour lesquelles les suites solutions convergent ?

Dans le cas où $m=-1$, par croissance comparée, on constate que les suites solutions sont toutes convergentes car elles tendent vers 0.
Dans le cas où $m\neq -1$, on constate que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{m-1}\times\dfrac{1}{5^n}=0$. Donc les suites solutions convergent si et seulement si $\left|-\dfrac{m}{5}\right|<1$ ou $-\dfrac{m}{5}=1$, c'est-à-dire si $-5\leqslant m<5$.
En conclusion les suites solutions seront convergentes si et seulement si $m\in[-5;5[$.

5. Dans le cas où $m=1$, déterminer l'unique solution de (E) vérifiant $u_0=12$.

Si $m=1$ et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (E), alors il existe un réel λ tel que, pour tout entier naturel n, on a $u_n=\lambda\left(-\dfrac{1}{5}\right)^n+\dfrac{1}{5^n}$.
Donc $u_0=\lambda\left(-\dfrac{1}{5}\right)^0+\dfrac{1}{5^0}=\lambda+1=12$ donc $\lambda=11$.
Ainsi, dans le cas où $m=1$, l'unique solution vérifiant (E) de terme initial $u_0=12$ est la suite de terme général $u_n=11\left(-\dfrac{1}{5}\right)^n+\dfrac{1}{5^n}$, pour tout entier naturel n.

Exercice 17.
On considère l'équation de récurrence suivante

$$(E)\ :\ u_{n+1}=2u_n+\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right),\ \forall n\in\mathbb{N}$$

1. *Préliminaires.*
   (a) Soient a et b deux réels. En utilisant l'égalité $e^{i(a+b)}=e^{ia}\times e^{ib}$, exprimer $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$ et $\sin(b)$.

On a $e^{i(a+b)}=\cos(a+b)+i\sin(a+b)$
et $e^{ia}\times e^{ib}=(\cos(a)+i\sin(a))(\cos(b)+i\sin(b))$
$=\cos(a)\cos(b)+i\cos(a)\sin(b)+i\sin(a)\cos(b)+i^2\sin(a)\sin(b)$
$=(\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b))+i(\cos(a)\sin(b)+\sin(a)\cos(b))$.
En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient
$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a+b)=\cos(a)\sin(b)+\sin(a)\cos(b)$.

   (b) En déduire une expression de $\cos\left((n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)$ et de $\sin\left((n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)$ en fonction de $\cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$ et $\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

En remarquant que $(n+1)\dfrac{\pi}{2}=n\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}$ et en appliquant les formules obtenues à la question précédente, on obtient :
$\cos\left((n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)\times 0-\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)\times 1$
$=-\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$
et $\sin\left((n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)\times 1+\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)\times 0$

$$= \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

2. Déterminer une solution particulière de (E) de la forme $v_n = \alpha\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \beta\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$, avec α et β deux réels.

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $(E) \iff v_{n+1} = 2v_n + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right), \forall n \in \mathbb{N}$

$\iff \alpha\cos\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right) + \beta\sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(\alpha\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \beta\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right), \forall n \in \mathbb{N}$

$\iff -\alpha\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \beta\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = (2\alpha+1)\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + 2\beta\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right), \forall n \in \mathbb{N}$

$\iff (2\alpha - \beta + 1)\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + (2\beta+\alpha)\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$

On remarque que si $\begin{cases} 2\alpha - \beta + 1 = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases}$ alors cela suffit.

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta + 1 = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\alpha - \beta = -1 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -2\beta \\ -5\beta = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = \frac{1}{5} \\ \alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = -\frac{2}{5}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{5}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$, pour tout entier n, vérifie (E).

3. *Autre méthode.*

   (a) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs complexes vérifiant la relation de récurrence (EC) : $u_{n+1} = 2u_n + e^{i\frac{\pi}{2}n}$, pour tout entier naturel n, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = \mathrm{Re}\,(u_n)$, pour tout entier naturel n, vérifie (E).

   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes vérifiant la relation de récurrence $(EC) : u_{n+1} = 2u_n + e^{i\frac{\pi}{2}n}$, pour tout entier naturel n.
   On note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $v_n = \mathrm{Re}\,(u_n)$, pour tout entier naturel n.
   Or $u_{n+1} = 2u_n + e^{i\frac{\pi}{2}n}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathrm{Re}\,(u_{n+1}) = \mathrm{Re}\left(2u_n + e^{i\frac{\pi}{2}n}\right), \forall n \in \mathbb{N}$

   $\iff \mathrm{Re}\,(u_{n+1}) = 2\mathrm{Re}\,(u_n) + \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{\pi}{2}n}\right), \forall n \in \mathbb{N}$

   $\iff v_{n+1} = 2v_n + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right), \forall n \in \mathbb{N}$

   (b) Déterminer une solution particulière de (EC) de la forme $w_n = \alpha e^{i\frac{\pi}{2}n}$, pour tout entier naturel n, avec α un réel.

   $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $(EC) \iff w_{n+1} = 2w_n + e^{i\frac{\pi}{2}n}, \forall n \in \mathbb{N}$

   $\iff \alpha e^{i\frac{\pi}{2}(n+1)} = 2\alpha e^{i\frac{\pi}{2}n} + e^{i\frac{\pi}{2}n}, \forall n \in \mathbb{N}$

   $\iff \alpha e^{i\frac{\pi}{2}n}e^{i\frac{\pi}{2}} = 2\alpha e^{i\frac{\pi}{2}n} + e^{i\frac{\pi}{2}n}, \forall n \in \mathbb{N} \iff \alpha e^{i\frac{\pi}{2}} = 2\alpha + 1$

   $\iff \alpha i = 2\alpha + 1 \iff (2-i)\alpha = -1 \iff \alpha = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$

   Donc la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $w_n = \left(-\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i\right)e^{i\frac{\pi}{2}n}$, pour tout entier naturel n, vérifie (EC).

   (c) En déduire une solution particulière de (E).

   D'après les deux questions précédentes, la suite de terme général $\mathrm{Re}\left(\left(-\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i\right)e^{i\frac{\pi}{2}n}\right)$ vérifie (E).
   Or
   $\mathrm{Re}\left(\left(-\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i\right)e^{i\frac{\pi}{2}n}\right) = \mathrm{Re}\left(\left(-\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right)\right) = -\frac{2}{5}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \frac{1}{5}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$
   Finalement on trouve la même solution particulière que dans la partie précédente.

4. En déduire la forme du terme général de l'ensemble des suites vérifiant (E). Exprimer ce terme général en fonction du terme initial.

On a $\mathcal{S}_{(E)} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \lambda 2^n + -\frac{2}{5}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \frac{1}{5}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \end{array} ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.
En fonction du terme initial, le terme général s'exprime de la façon suivante :

$$u_n = 2^n\left(u_0 + \frac{2}{5}\right) + -\frac{2}{5}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \frac{1}{5}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right), \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Exercice 18.
Soit a un réel strictement positif.
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ deux suites définies par la donnée de $u_1 > 0$ et par la donnée de

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad u_{n+1} = a(u_n)^2 \quad \text{et} \quad v_n = \ln(u_n).$$

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est arithmético-géométrique.

   Soit n dans $\mathbb{N}^\star$. $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln\left(au_n^2\right) = 2\ln(u_n) + \ln(a) = 2v_n + \ln(a)$.
   La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc arithmético-géométrique.

2. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

   On a $v_{n+1} = 2v_n + \ln(a)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
   - Les suites vérifiant la relation homogène associée sont les suites géométriques de raison 2.
   - La suite constante égale à $-\ln(a)$ vérifie la relation de départ.
   - Donc, pour tout entier n strictement positif, on a $v_n = 2^{n-1}v_1 - \ln(a)$. La puissance $n-1$ est due au fait que v_0 n'est pas défini (on commence à $n = 1$).

   De plus on a $v_1 + \ln(a) = \ln(u_1) + \ln(a) = \ln(au_1)$ et $u_n = \exp(v_n)$. finalement, pour tout entier n strictement positif, on a $u_n = \exp\left(2^{n-1}\ln(au_1) - \ln(a)\right) = \exp\left(2^{n-1}\ln(au_1)\right) \times \exp\left(-\ln(a)\right) = (au_1)^{2^{n-1}}\frac{1}{a}$.

3. Déterminer, selon les valeurs de u_1 et a, la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

   - Si $u_1 > \frac{1}{a}$, alors $au_1 > 1$ donc la suite tend vers $+\infty$.
   - Si $u_1 = \frac{1}{a}$, alors $au_1 = 1$ donc la suite est constante égale à son premier terme u_1.
   - Si $0 < u_1 < \frac{1}{a}$, alors $0 < au_1 < 1$ donc la suite tend vers 0.

Thème 2

Suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 19 (À préparer pour le TD2).
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 0, \\ u_{n+1} &= \sqrt{2u_n+3} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.

   On peut le montrer par récurrence (c'est ce qui est fait ci-dessous) ou en montrant que l'intervalle $[0;3]$ est stable par la fonction $x \mapsto \sqrt{2x+3}$.
   On pose, pour tout entier n positif, $H_n : 0 \leqslant u_n \leqslant 3$.

   - Initialisation : $u_0 = 0$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 3$ ainsi H_0 est vraie.
   - Hérédité : Supposons H_n vraie et montrons que H_{n+1} est vraie.
     $0 \leqslant u_n \leqslant 3 \Leftrightarrow 3 \leqslant 2u_n+3 \leqslant 9 \Leftrightarrow \sqrt{3} \leqslant \sqrt{2u_n+3} \leqslant 3 \Rightarrow 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$
   - Conclusion : par principe de récurrence, H_n est vraie pour tout entier n positif. Donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

   On pose, pour tout entier n positif, $H_n : u_n < u_{n+1}$.

   - Initialisation : $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{0+3} = \sqrt{3} > 0 = u_0$ donc H_0 est vraie.
   - Hérédité : Supposons H_n vraie et montrons que H_{n+1} est vraie.
     $u_n < u_{n+1} \Leftrightarrow 2u_n+3 < 2u_{n+1}+3 \Leftrightarrow \sqrt{2u_n+3} < \sqrt{2u_{n+1}+3} \Rightarrow u_{n+1} < u_{n+2}$.
   - Conclusion : par principe de récurrence, H_n est vraie pour tout entier n positif. Donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n < u_{n+1}$, ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc elle converge. Notons l sa limite. l est également la limite de la suite (u_{n+1}). Ainsi l doit vérifier $l = \sqrt{2l+3} \Leftrightarrow l^2 - 2l - 3 = 0 \Leftrightarrow l = 3$ ou $l = -1$. Or, pour tout entier n positif, $u_n \geqslant 0$ donc $l \geqslant 0$. Ainsi la seule limite possible de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 3. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

4. Réaliser une représentation graphique permettant de visualiser les comportement possible de la suite selon la valeur de son terme initial. Et lister les situations possibles pour les différentes valeurs de u_0.

   Si $u_0 < -\frac{2}{3}$, alors la suite n'est pas convergente.
   Si $u_0 \in \left[-\frac{2}{3};3\right[$, alors la suite est croissante et tend vers 3.
   Si $u_0 = 3$, alors la suite est constante égale à 3 et donc tend vers 3.
   Si $u_0 > 3$, alors la suite est décroissante et tend vers 3.

Exercice 20.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 3, \\ u_{n+1} &= \dfrac{u_n^2}{2u_n-1} \end{cases}$$

1. Montrer que l'intervalle $[1; +\infty[$ est stable par $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{2x-1}$. En déduire que la suite est bien définie et minorée par 1.

   Une classique étude de fonction permet d'obtenir que f est croissante. De plus $f(1) = 1$. On a donc
   $$\forall x \in [1; +\infty[,\ f(x) \geqslant 1$$
   Ainsi l'intervalle $[1; +\infty[$ est stable par f.
   Or f est la fonction définissant la relation de récurrence de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in [1; +\infty[$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et, pour tout entier n, $u_n \in [1; +\infty[$. La suite est donc minorée par 1.

2. Étudier la monotonie de la suite.

   La fonction f est croissante sur $[1; +\infty[$ donc la suite est monotone. Or $u_0 = 3$ et $u_1 = \dfrac{1}{5}$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 1), elle est donc convergente d'après le théorème de convergence monotone.

   Notons ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors on a forcément $\ell = \dfrac{\ell^2}{2\ell-1} \Leftrightarrow \ell^2 - 2\ell^2 + \ell = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell = 1$.
   Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$ donc la suite ne peut pas converger vers 0. Sa limite est forcément 1.

4. À l'aide d'une représentation graphique, déterminer la situation selon la valeur de u_0.

   Pour tout $u_0 \geqslant 1$, la suite va converger vers 1.
   Si $\dfrac{1}{2} < u_0 < 1$, aussi.
   Autres cas il faut refaire une étude.

Exercice 21.
Soit a un réel fixé. On considère la suite définie par : $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3}{4}(u_n - 2)^2 \geqslant 0$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Montrer que sa limite est 2.

   On suppose que la suite converge. Notons l la valeur de sa limite en $+\infty$. Alors, d'une part, par produit et combinaison linéaire de limites, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3 = \dfrac{3}{4}l^2 - 2l + 3$, et, d'autre part, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$. Par unicité de la limite, on a $\dfrac{3}{4}l^2 - 2l + 3 = l$, d'où $\dfrac{3}{4}(l-2)^2 = 0$, donc $l = 2$.
   Donc si la suite est convergente, alors sa limite vaut 2.

3. On suppose que $a > 2$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

   On suppose $u_0 > 2$. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors sa limite vaut 2 d'après la question précédente. Or la suite est croissante donc, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant u_0 > 2$. Cela oblige sa potentielle limite a être supérieure ou égale à u_0 mais $u_0 > 2$. Donc la suite ne peut pas être convergente.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente et croissante. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

4. Montrer qu'il existe deux nombres réels b_1 et b_2 $(b_1 < b_2)$, tels que, si $a = b_1$ ou $a = b_2$, alors on a $u_1 = 2$.

   $$u_1 = 2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}a^2 - 2a + 3 = 2 \Leftrightarrow (a-2)\left(a - \frac{2}{3}\right) = 0$$
   Donc il existe deux valeurs $b_1 = \dfrac{2}{3}$ et $b_2 = 2$, telles que si $a = b_1$ ou $a = b_2$, alors on a $u_1 = 2$.

5. On suppose que $b_1 \leqslant a \leqslant b_2$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

   On pose $f : x \mapsto \dfrac{3}{4}x^2 - 2x + 3$. Montrons que l'intervalle $\left[\dfrac{2}{3};2\right]$ est stable par f.
   On réalise une étude de fonction classique avec tableau de variation et on constate que

   $$\forall x \in \left[\frac{2}{3};2\right],\ f(x) \in \left[\frac{5}{3};2\right] \subset \left[\frac{2}{3};2\right]$$

   L'intervalle $\left[\dfrac{2}{3};2\right]$ est donc bien stable par f.
   Ainsi si $u_0 = a \in \left[\dfrac{2}{3};2\right]$, tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans l'intervalle $\left[\dfrac{2}{3};2\right]$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée. De plus, elle est croissante. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (sa limite vaut alors 2).

6. On suppose que $a < b_1$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

   L'étude la la fonction f nous montre que si $a < \dfrac{2}{3}$, alors $u_1 > 2$. Puis comme à la question 2., on montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 22.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - x^2$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   $u_{n+1} - u_n = u_n - u_n^2 - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$ Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2. On suppose dans cette question que $u_0 \in [0\,;1]$.
   (a) Montrer que, pour tout entier n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

   On va montrer que l'intervalle $[0\,;1]$ est stable par f.
   Étudions la fonction f : $f'(x) = 1 - 2x$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$			$+$		0		$-$		
variations de f	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0	↘	$-\infty$

   Ainsi on a $f([0\,;1]) = \left[0\,;\dfrac{1}{4}\right] \subset [0\,;1]$.
   Donc si $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$, alors pour tout entier n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.

   (c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Notons ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors on a forcément $\ell = \ell - \ell^2 \Leftrightarrow \ell^2 = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

3. On suppose maintenant que $u_0 < 0$. Prouver par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

   Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et notons ℓ sa limite. ℓ est forcément un point fixe de f donc la seule valeur possible de ℓ est 0.
   Or la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc pour tout entier n positif, on a $0 > u_0 \geqslant u_n \geqslant \ell$.
   Cela nous mène à une contradiction. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge donc pas. Comme elle est décroissante elle tend vers $-\infty$.

4. On suppose finalement que $u_0 > 1$. Que dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

   Si $u_0 > 1$, l'étude de la fonction f nous informe que $u_1 < 0$. On peut alors reprendre le raisonnement de la question précédente et conclure que, dans ce cas également, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

Exercice 23.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}.$$

1. Étudier la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, pour tout réel x.

   La fonction f est définie, continue et dérivable sur $[0, +\infty[$ et :

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0$$

   On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$-$	
variations de f	1 ↘	0

   Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $]0, 1]$.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, u_n est dans $[0, 1]$.

   Posons, pour tout entier naturel n, $\mathcal{H}_n : 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
   - Initialisation. $u_0 = 1$, d'où $\mathcal{H}_0$ est vraie.
   - Hérédité. Soit n dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{H}_n$ est vraie et montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
     D'après la continuité et la décroissance de f, $f([0,1]) = [f(1), f(0)] = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \subset [0, 1]$.
     Or u_n est dans $[0, 1]$, donc $u_{n+1} = f(u_n)$ appartient à $[0, 1]$.
     Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

   On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
   Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   Comme la fonction f est décroissante, la fonction $f \circ f$ est croissante.
   $v_0 = 1$ et $v_1 = u_2 = \dfrac{1}{2}$.
   Montrons par récurrence que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   Posons, pour tout entier naturel n, $\mathcal{H}_n : v_{n+1} \leqslant v_n$.
   - Initialisation : $v_1 = \dfrac{1}{2} \leqslant 1 = v_0$, d'où $\mathcal{H}_0$ est vraie.
   - Hérédité : Soit n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
     On a $v_{n+1} \leqslant v_n$. Comme $f \circ f$ est croissante, on a

     $$\begin{aligned} v_{n+1} \leqslant v_n &\implies (f\circ f)(v_{n+1}) \leqslant (f\circ f)(v_n) \\ &\iff f(f(u_{2n+2})) \leqslant f(f(u_{2n})) \\ &\iff f(u_{2n+3}) \leqslant f(u_{2n+1}) \\ &\iff u_{2n+4} \leqslant u_{2n+2} \\ &\iff v_{n+2} \leqslant v_{n+1}. \end{aligned}$$

     D'où $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

On en déduit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Comme $w_0 = \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{5}{3} = w_1$, on démontrerait de même que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. En déduire que ces deux suites sont convergentes.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0.
La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1.
Donc les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites convergentes.
On note ℓ_1 et ℓ_2 leurs limites respectives.

4. On note g la fonction $f \circ f$, c'est-à-dire que

$$\forall x \in [0, +\infty[, \qquad g(x) = f \circ f(x) = f(f(x)).$$

(a) Exprimer $g(x)$ en fonction de x.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad g(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}} = \frac{x+1}{x+2}.$$

(b) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0, 1]$ et la calculer.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad g(x) = x \iff x^2 + x - 1 = 0.$$

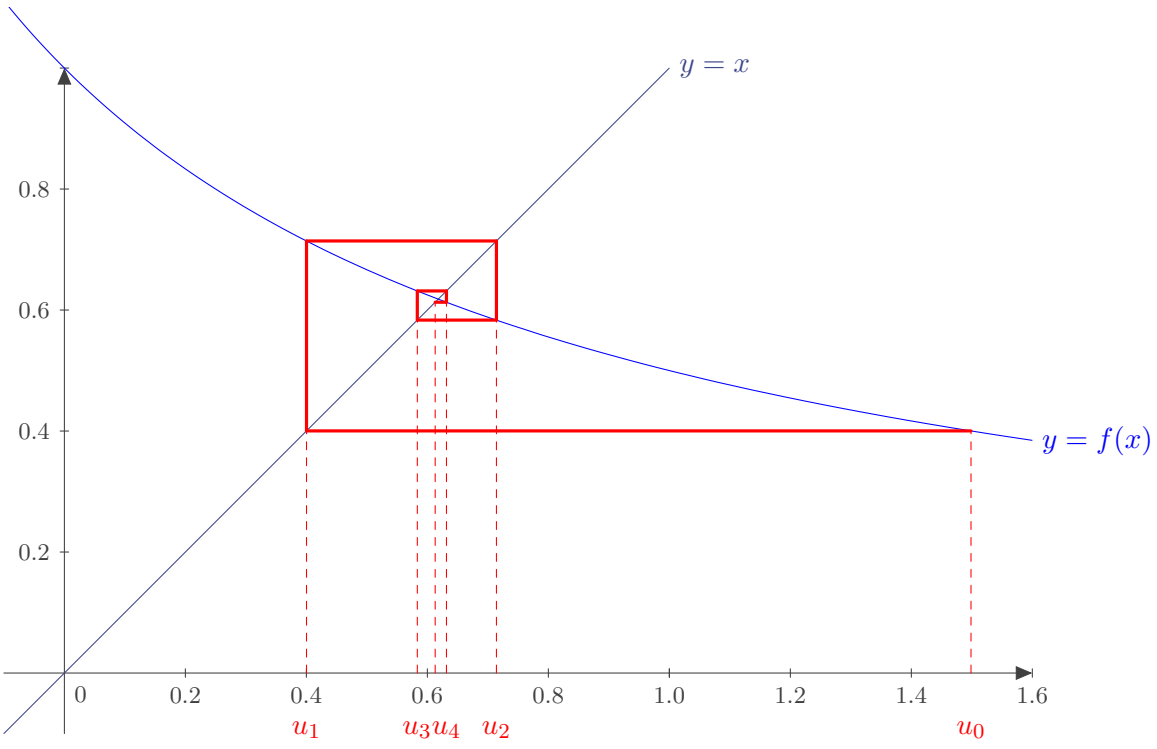
Cette équation du second degré admet deux solutions dont une seule dans $[0, 1]$: $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

(c) Vérifier que pour tout n, $v_{n+1} = g(v_n)$ et $w_{n+1} = g(w_n)$.
En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \alpha$.

D'après la question 3., on a vu que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f \circ f(v_n) = g(v_n)$ et de même $w_{n+1} = f \circ f(w_n) = g(w_n)$.
Comme g est continue, par passage à la limite pour la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $\ell_1 = g(\ell_1)$ et $\ell_1 \in [0, 1]$, donc $\ell_1 = \alpha$.
De même $\ell_2 = \alpha$.

(d) Conclure pour la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.
Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.



Exercice 24 (Extrait du CC1 2016-2017).
Soit α un réel strictement supérieur à 1.
On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{\alpha u_n}{1+2u_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et strictement positive.

   On pose H_n : « u_n est bien définie et est strictement positive ».
   - Initialisation : $u_0 > 0$ d'après l'énoncé. Donc H_0 est vraie.
   - Hérédité : supposons que H_n est vraie pour un n fixé, c'est-à-dire que u_n existe et $u_n > 0$.
     Comme $u_n > 0$, on a $2u_n + 1 \neq 0$. Donc u_{n+1} est bien définie.
     De plus comme $u_n > 0$ et $2u_n + 1 >$ alors $u_{n+1} > 0$.
     Ainsi H_{n+1} est vraie.
   - Par principe de récurrence H_n est vraie pour tout entier positif n.

2. On suppose dans cette question que $u_0 = \dfrac{\alpha-1}{2}$.
   Comment évolue la suite ? Vous pouvez éventuellement calculer ses premiers termes.

   On remarque que dans ce cas la suite est constante égale à $u_0 = \dfrac{\alpha-1}{2}$.

3. On suppose dans cette question que $u_0 > \dfrac{\alpha-1}{2}$.

   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n > \dfrac{\alpha-1}{2}$.

   On pose H_n : « $u_n > \dfrac{\alpha-1}{2}$ ». Puis on le démontre par récurrence et utilisant (et montrant) que f est strictement croissante et que $f\left(\dfrac{\alpha-1}{2}\right) = \dfrac{\alpha-1}{2}$.

   (b) Étudier la monotonie de la suite.

   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{\alpha u_n}{1+2u_n} - u_n = \dfrac{u_n(\alpha - 1 - 2u_n)}{1+2u_n}$ du même signe que $\alpha - 1 - 2u_n$
   Or $u_n > \dfrac{\alpha-1}{2}$ donc la suite est décroissante.

   (c) Est-elle convergente ? Justifier.

   La suite est décroissante est minorée, d'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente.

4. On suppose dans cette question que $0 < u_0 < \dfrac{\alpha-1}{2}$.

   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $0 < u_n < \dfrac{\alpha-1}{2}$.

   Comme à la question 3a, on utilise la stricte croissance de f et ses valeurs en 0 et $\dfrac{\alpha-1}{2}$.

   (b) Étudier la monotonie de la suite.

   On réutilise le travail de la question 3(b) et on en déduit que la suite est croissante.

   (c) Est-elle convergente ? Justifier.

   Question de cours : la suite est croissante et majorée donc elle converge.

5. Dans cette question, on suppose que $u_0 \neq \dfrac{\alpha-1}{2}$ et on souhaite obtenir une expressions du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour cela, on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour tout entier positif n,

$$v_n = \frac{u_n}{1-\alpha+2u_n}.$$

(a) Justifier la bonne définition de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$1-\alpha+2u_n = 0 \Leftrightarrow u_n = \dfrac{1-\alpha}{2}$. Or précédemment on a vu que dans les situations où $u_0 \neq \dfrac{1-\alpha}{2}$ (questions 3a et 4a) alors $u_n \neq \dfrac{1-\alpha}{2}$, pour tout entier n. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien définie dans notre cas.

(b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-\alpha+2u_{n+1}} = \frac{\alpha u_n}{1+2u_n} \times \frac{1}{1-\alpha+2\frac{\alpha u_n}{1+2u_n}} = \frac{\alpha u_n}{1+2u_n-\alpha-2\alpha u_n+2\alpha u_n} = \alpha v_n$$

(c) En déduire le terme général de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour tout entier positif n, on a donc $v_n = \alpha^n v_0$.

(d) Montrer que, pour tout $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $v_0 < 0$.

On pose $h : x \mapsto \dfrac{x}{1-\alpha+2x}$. Alors $h'(x) = \dfrac{1-\alpha}{(1-\alpha+2x)^2} < 0$. La fonction h est donc décroissante. Donc pour tout $x > 0$, $h(x) < h(0) = 0$. Ainsi pour tout $u_0 > 0$, $v_0 < 0$. Au final, pour tout entier positif n, on a $v_n = \alpha^n u_0 < 0$.

(e) Déduire des deux questions précédentes le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$v_n = \dfrac{u_n}{1-\alpha+2u_n} \Leftrightarrow (1-\alpha)v_n + 2u_n v_n = u_n \Leftrightarrow (1-\alpha)v_n = u_n(1-2v_n) \Leftrightarrow u_n = \dfrac{(1-\alpha)v_n}{1-2v_n)}$
car $v_n \neq \dfrac{1}{2}$
Ainsi pour tout entier positif n, on a
$$u_n = \frac{(1-\alpha)\alpha^n v_0}{1-2\alpha^n v_0} = \frac{(1-\alpha)\alpha^n \frac{u_0}{1-\alpha+2u_0}}{1-2\alpha^n \frac{u_0}{1-\alpha+2u_0}} = \frac{(1-\alpha)\alpha^n u_0}{1-\alpha+2u_0-2\alpha^n u_0} = \frac{1-\alpha)\alpha^n u_0}{1-\alpha+2u_0(1-\alpha^n)} = \frac{\alpha^n u_0}{1+2u_0\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}}$$

(f) En raisonnant uniquement sur l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donner la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (convergence ou divergence) et la valeur, le cas échéant, de sa limite.

$$u_n = \frac{(1-\alpha)\alpha^n u_0}{1-\alpha+2u_0-2\alpha^n u_0} = \frac{1-\alpha}{\frac{1-\alpha+2u_0}{\alpha^n u_0} - 2}$$
Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1-\alpha}{-2} = \dfrac{\alpha-1}{2}$.

Exercice 25.
Soit b un nombre réel strictement positif.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad \text{avec } f(x) = \sqrt{2x+b}.$$

Le but de l'exercice est d'étudier le comportement asymptotique de cette suite.

1. Donner l'ensemble de définition de f.

Pour que la fonction f soit bien définie, il faut que l'expression dans la racine carrée soit positive.
Or $2x+b \geqslant 0 \Leftrightarrow 2x \geqslant -b \Leftrightarrow x \geqslant -\dfrac{b}{2}$. Donc l'ensemble de définition de f est $D_f = \left[-\dfrac{b}{2}\,;+\infty\right[$.

2. Montrer que la fonction f admet un unique point fixe, que l'on notera α.

x est un point fixe de $f \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{2x+b} = x \Leftrightarrow x \geqslant 0$ et $2x+b = x^2 \Leftrightarrow x^2-2x-b = 0$
On a $\Delta = 4(1+b) > 0$ donc $x = 1-\sqrt{1+b}$ ou $x = 1+\sqrt{1+b}$. Or $1-\sqrt{1+b} < 0$. Donc f admet un unique point fixe $\alpha = 1+\sqrt{1+b}$.

3. En étudiant la fonction f sur $\mathbb{R}_+$, montrer que les intervalles $]0;\alpha[$ et $]\alpha;+\infty[$ sont stables par f.

   f est dérivable sur $\left]-\frac{b}{2}\,;\,+\infty\right[$ et $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+b}}$. On a donc

x	$-\frac{b}{2}$	0	α	$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$		
variations de f		0 ↗ $\sqrt{b}$	↗ α	↗ $+\infty$

   Ainsi $f\,(]0\,;\,\alpha[) \subset]0\,;\,\alpha[$ et $f\,(]\alpha\,;\,+\infty[) \subset]\alpha\,;\,+\infty[$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et strictement positive.

   $u_0 \in]0\,;\,+\infty[$ et cet intervalle est stable par f. La suite est donc bien définie et strictement positive.

5. Dans cette question, on suppose que $0 < u_0 < \alpha$.

   (a) En utilisant la question 3, montrer que $0 < u_n < \alpha$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   $u_0 \in]0\,;\,\alpha[$ et cet intervalle est stable par f. Donc $0 < u_n < \alpha$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

   La fonction f est strictement croissante donc la suite est monotone. $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \sqrt{2u_n+b} - u_n$
   $u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow \sqrt{2u_n+b} > u_n \Leftrightarrow 2u_n + b > u_n^2$ car tout est positif $\Leftrightarrow u_n^2 - 2u_n - b < 0 \Leftrightarrow x < \alpha$
   D'après la question précédente, $0 < u_n < \alpha$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   La suite est ainsi bien strictement croissante.

   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

   La suite est majorée (par α) et strictement croissante. Elle est donc convergente. Sa seule limite possible est la point fixe α. Ainsi $\lim\limits_{n_to+\infty} u_n = \alpha$.

6. Dans cette question, on suppose que $u_0 > \alpha$.

   (a) En utilisant la question 3, montrer que $u_n > \alpha$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   $u_0 \in]\alpha\,;\,+\infty[$ et cet intervalle est stable par f. Donc $u_n > \alpha$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   En raisonnant comme à la question 5(b), on a que si $u_0 > \alpha$, alors pour tout entier positif n, on a $u_{n+1} - u_n < 0$. Dans ce cas la suite est donc strictement décroissante.

   (c) Conclure sur le comportement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans ce cas.

   La suite est minorée (par α) et décroissante, elle est donc convergente. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

7. Étudier la cas restant : $u_0 = \alpha$, et résumer les résultats de l'exercice.

   Si $u_0 = \alpha$, la suite est constante égale à α. Donc dans tous les cas, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

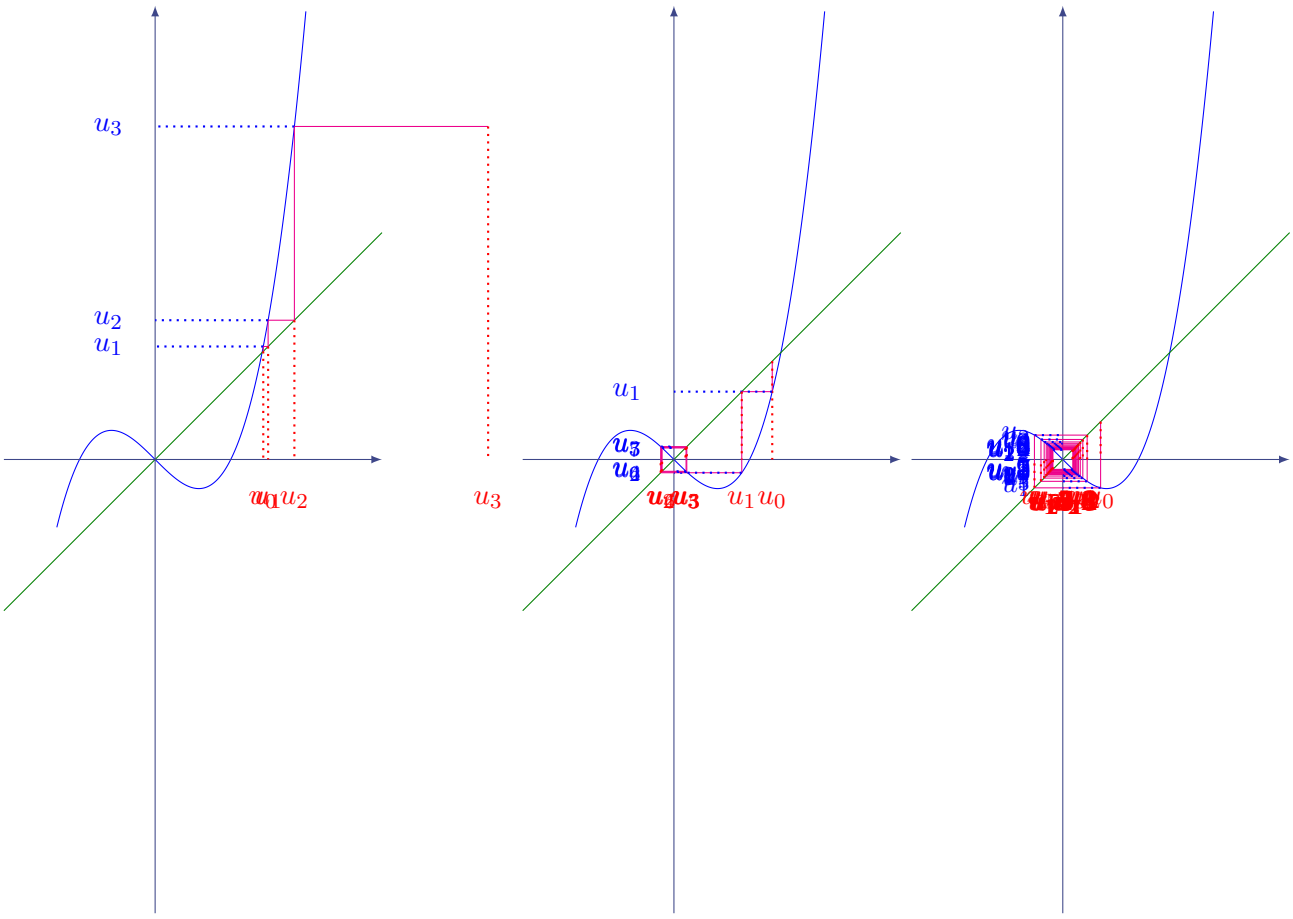
Exercice 26.
Étudier graphiquement les suites définies par les relations de récurrence suivantes :

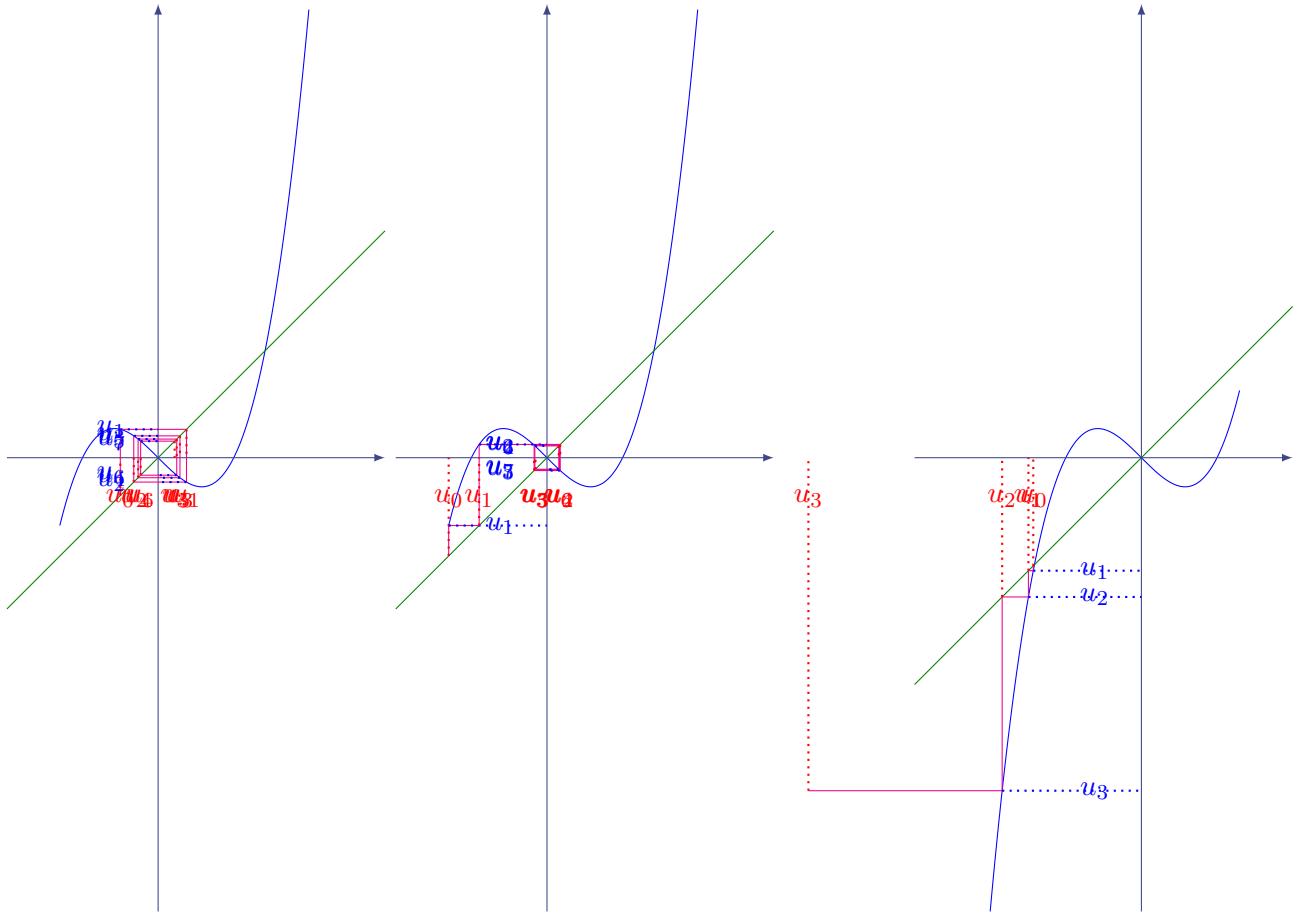
1. $u_{n+1} = u_n^3 - u_n$;

   Étude de la fonction : $f'(x) = 3x^2 - 1$
   Tableau de variation :

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f	$-\infty$	$\nearrow -\sqrt{2}$	$\nearrow \frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow 0$	$\searrow -\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow \sqrt{2}$	$\nearrow +\infty$

Recherche de points fixe : $\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell^3 - \ell = \ell \Leftrightarrow \ell^3 - 2\ell = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell = \sqrt{2}$ ou $\ell = -\sqrt{2}$
Dérivée aux points fixes : $f'(0) = -1$, $f'(-\sqrt{2}) = f'(\sqrt{2}) = 5$.

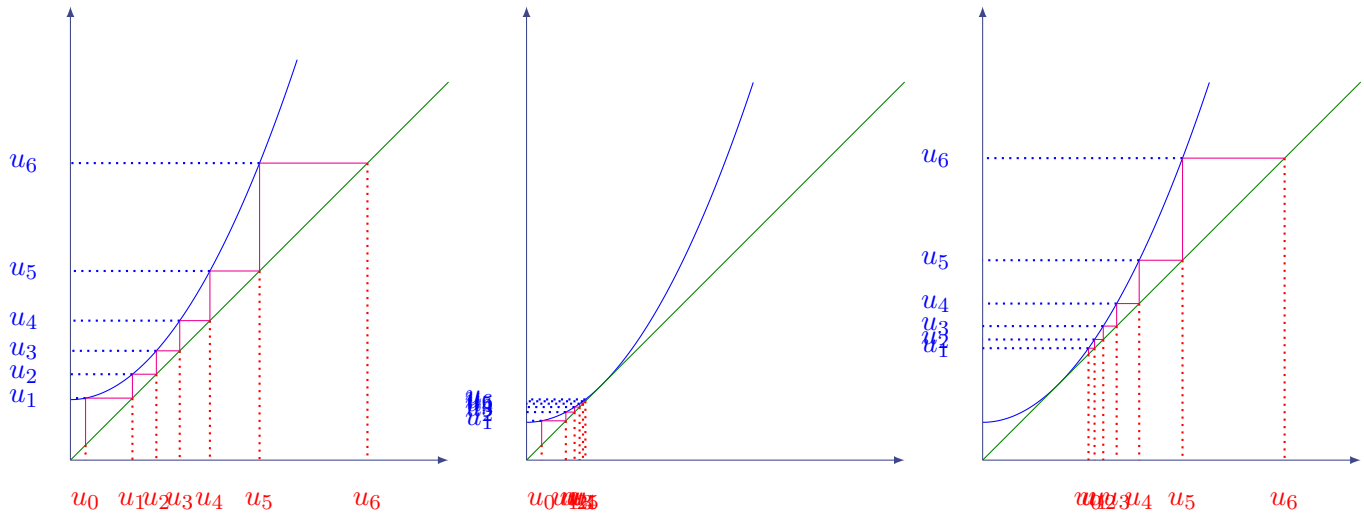


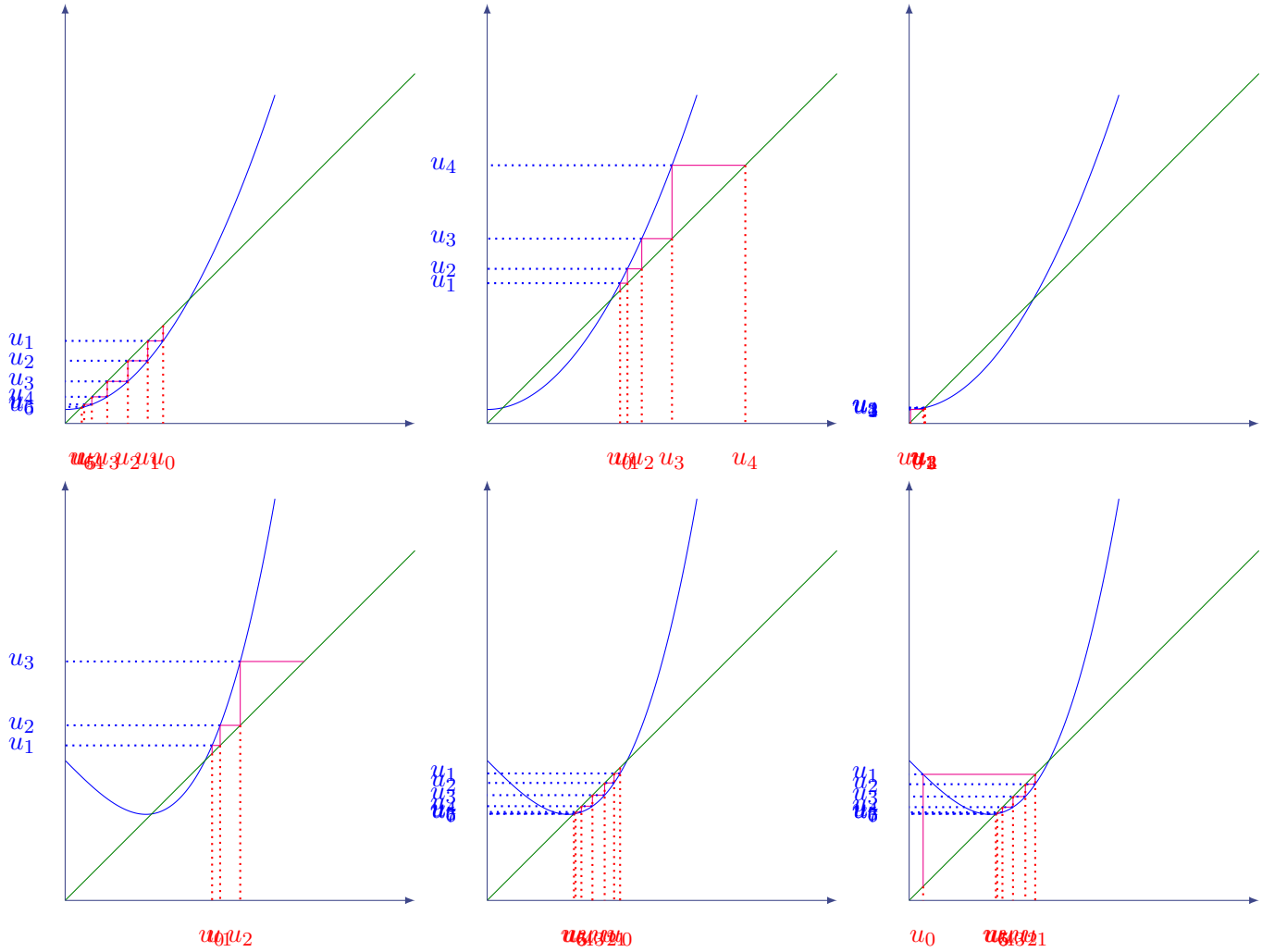


2. $u_{n+1} = u_n^2 + \alpha$, selon la valeur du réel α.

   Commencer par chercher le nombre de points d'équilibre possibles en fonction de α.

   - si $\alpha < \dfrac{1}{4}$, alors 2 points d'équilibres : $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{1-4\alpha}}{2}$ et $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{1-4\alpha}}{2}$:
   - si $\alpha = \dfrac{1}{4}$, un unique point d'équilibre : $x_e = \dfrac{1}{2}$;
   - si $\alpha > \dfrac{1}{4}$, aucun point d'équilibre.




u_1
u_2
u_3
u_4
u_0
u_1
u_2
u_3
u_4
u_3
u_2
u_1
u_0
u_1
u_2
u_3
u_0
u_1
u_2
u_3
u_0

Equations récurrentes en dimension p

Exercice 27 (A préparer pour le TD3).
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On considère la récurrence

$$X_{n+1} = AX_n.$$

Déterminer une expression explicite de X_n.

Le polynôme caractéristique de A est

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(-\lambda) - 3 = \lambda^2 - \lambda - 3.$$

On vérifie que

$$P(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 1),$$

donc les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = -1.$$

et A est diagonalisable. Des vecteurs propres associés sont

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

On décompose la condition initiale :

$$X_0 = \alpha v_1 + \beta v_2.$$

En résolvant

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

on obtient

$$\alpha = \frac{2}{5}, \qquad \beta = \frac{1}{5}.$$

Ainsi,

$$X_n = \alpha\, 2^n v_1 + \beta\, (-1)^n v_2,$$

soit

$$X_n = \frac{2}{5}\, 2^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\, (-1)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$X_n = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}\, 2^n + \frac{1}{5}\, (-1)^n \\ \frac{2}{5}\, 2^n - \frac{2}{5}\, (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 28 (A preparer pour le TD3).
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et le vecteur $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Résoudre l'équation de récurrence en dimension 2 :

$$X_{n+1} = AX_n + B.$$

1. Résolution de l'équation homogène.
Considérons d'abord l'équation homogène associée

$$X^{\mathfrak{h}}_{n+1} = AX^{\mathfrak{h}}_n.$$

Calcul de A^n **Calcul direct** On peut remarquer que

$$A^2 = -I.$$

Par récurrence,

$$A^{2k} = (-1)^k I, \qquad A^{2k+1} = (-1)^k A.$$

Avec les valeurs propres Si on ne voit pas directement la propriété ci-dessus, la méthode standard est la suivante.
Le polynôme caractéristique de A est

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(-1-\lambda) + 2 = \lambda^2 + 1.$$

Les valeurs propres sont donc

$$\lambda = i = e^{i\frac{\pi}{2}} \qquad \text{et} \qquad \bar{\lambda} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Il existe donc une matrice inversible P telle que $A = PRP^{-1}$ avec $R = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
De plus $A^n = PR^nP^{-1}$ avec

$$R^n = \begin{pmatrix} \cos(n\pi/2) & -\sin(n\pi/2) \\ \sin(n\pi/2) & \cos(n\pi/2) \end{pmatrix}.$$

Le calcul explicite de P est inutile.

Solution générale La solution générale de l'équation homogène est donc

$$X^{\mathfrak{h}}_n = \cos(n\pi/2)U + \sin(n\pi/2)V$$

où U et V sont deux vecteurs constants de $\mathbb{R}^2$.

2. Recherche d'une solution particulière.
On cherche une solution particulière constante $X_n = X^{\mathfrak{p}}$.
En remplaçant dans l'équation,

$$X^{\mathfrak{p}} = AX^{\mathfrak{p}} + B,$$

soit

$$(I - A)X^{\mathfrak{p}} = B.$$

Comme

$$I - A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

on obtient le système

$$\begin{cases} 2y = 0, \\ -x + 2y = 1. \end{cases}$$

Ainsi

$$X^{\mathfrak{p}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Solution générale.
La solution générale de l'équation complète est la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière :

$$X_n = X_n^{\mathfrak{h}} + X_n^{\mathfrak{p}} = \cos(n\pi/2)U + \sin(n\pi/2)V + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la condition initiale X_0, on obtient

$$U = X_0 - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = X_0 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$V = X_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } X_1 = AX_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

soit

$$V = AX_0 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$\boxed{X_n = \left(X_0 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\cos(n\pi/2) + \left(AX_0 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\sin(n\pi/2) + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Remarquez que

$$\cos(n\pi/2) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est impair} \\ 1 \text{ si } n = 4q \ (q \in \mathbb{Z}) \\ -1 \text{ si } n = 4q+2 \ (q \in \mathbb{Z}) \end{cases} \quad \text{et} \quad \sin(n\pi/2) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 1 \text{ si } n = 4q+1 \ (q \in \mathbb{Z}) \\ -1 \text{ si } n = 4q+3 \ (q \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Exercice 29 (A préparer pour le TD3).
On s'intéresse à l'équation $X_{n+1} = AX_n + B$ où $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.8 & 0.5 \end{pmatrix}$,avec $B = (1,-1)^T$ et $X_0 = (-1,0)^T$.

1. Déterminer explicitement X_n. Que peut-on dire du comportement asymptotique (lorsque $n \to +\infty$) ?
2. Reprendre la question précédente pour un $X_0 \in \mathbb{R}^2$ quelconque.

1. Le polynôme caractéristique de A est

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 0.7\lambda - 0.3 = (\lambda - 1)(\lambda + 0.3).$$

Les valeurs propres sont donc

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = -0.3.$$

A est une matrice carrée de taille 2 et admet deux valeurs propres réelles distinctes donc est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Pour $\lambda = 1$, on trouve un vecteur propre

$$V_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda = -0.3$, on trouve un vecteur propre

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La solution générale de l'équation homogène est

$$X_n^{\mathfrak{h}} = \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} + \beta(-0.3)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Cherchons une solution particulière constante. Elle doit vérifier

$$(I - A)X^{\mathfrak{p}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Attention, ici $I - A$ n'est pas inversible. Cependant, on vérifie que

$$X^{\mathfrak{p}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

est *une* solution (parmi une infinité). La solution générale est donc

$$X_n = \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} + \beta(-0.3)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

La condition initiale

$$X_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donne

$$\alpha \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit,

$$\begin{cases} 5\alpha + \beta = -1, \\ 8\alpha - \beta = 2. \end{cases}$$

En additionnant les deux équations, on obtient

$$13\alpha = 1,$$

d'où

$$\alpha = \frac{1}{13}.$$

Puis

$$\beta = -1 - \frac{5}{13} = -\frac{18}{13}.$$

Ainsi

$$\boxed{X_n = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix} - \frac{18}{13}(-0.3)^n\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}.}$$

Comme

$$(-0.3)^n \longrightarrow 0,$$

on obtient

$$\boxed{X_n \longrightarrow \frac{1}{13}\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5/13\\-18/13\end{pmatrix}.}$$

La suite converge donc vers

$$\left(\frac{5}{13}, -\frac{18}{13}\right)^T.$$

2. Cas d'un $X_0 = (a,b)^T \in \mathbb{R}^2$ quelconque. On repart de la solution générale

$$X_n = \alpha\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix} + \beta(-0.3)^n\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}.$$

En prenant $n = 0$ il vient

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$$

d'où le système

$$\begin{cases}5\alpha + \beta = a\\8\alpha - \beta = b + 2\end{cases}.$$

On en déduit $\alpha = \dfrac{a+b+2}{13}$ puis $\beta = \dfrac{8a-5b-10}{13}$.

Finalement

$$\boxed{X_n = \frac{a+b+2}{13}\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix} + \frac{8a-5b-10}{13}(-0.3)^n\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}.}$$

Comme

$$(-0.3)^n \longrightarrow 0,$$

on obtient

$$\boxed{X_n \longrightarrow \frac{a+b+2}{13}\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}}$$

Exercice 30 (Plus difficile).
On reprend l'exercice précédent mais avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$

1. Déterminer une solution particulière.
   On pourra chercher une solution particulière sous la forme $X_n^{\mathfrak{p}} = nU + V$
2. Calculer X_n pour $X_0 = (a, b)^T$. Que peut-on dire du comportement asymptotique ?

Rappellons que A admet deux valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -0.3$ associées respectivement aux vecteurs propres $V_1 = (5, 8)^T$ et $V_2 = (1, -1)^T$.

1. Notons tout de suite que comme 1 est valeur propre, la matrice $I - A$ n'est pas inversible et les formules du cours ne s'appliquent pas. On cherche d'abord une solution particulière constante. Elle devrait vérifier

$$(I - A)X^{\mathfrak{p}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Or ce système n'admet aucune solution. Donc il n'existe donc pas de solution particulière constante.
   Suivant l'énoncé, prenons $X_n^{\mathfrak{p}} = nU + V$ où U et V sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ à déterminer.
   L'équation de récurrence donne pour tout $n \geqslant 0$:

$$X_{n+1}^{\mathfrak{p}} = AX_n^{\mathfrak{p}} + B$$

   c'est-à-dire explicitement

$$(n+1)U + V = A(nU + V) + B = nAU + AV + B.$$

   En particulier, en prenant $n = 0$ il vient

$$U + V = AV + B$$

   et en prenant $n = 1$ il vient

$$2U + V = AU + AV + B.$$

   En soustrayant ces deux équations on obtient

$$U = AU$$

   donc $U = \nu V_1$ pour un réel ν à déterminer.
   En reprenant l'équation pour $n = 0$ on a donc

$$(I - A)V = B - \nu V_1$$

   soit explicitement en notant $V = (x, y)^T$, le système

$$\begin{cases} 0.8x - 0.5y = 1 - 5\nu \\ -0.8x + 0.5y = \quad -8\nu \end{cases}$$

   En ajoutant les deux lignes on obtient le système équivalent

$$\begin{cases} 0.8x - 0.5y = 1 - 5\nu \\ 0 \qquad\quad = 1 - 13\nu \end{cases}$$

   Donc ce système admet au moins une solution si et seulement si $\nu = \dfrac{1}{13}$ et dans ce cas

$$0.8x - 0.5y = 1 - 5\nu = \frac{8}{13}$$

soit une infinité de solutions, par exemple $x = \frac{10}{13}$ et $y = 0$. Finalement on a $U = \nu V_1 = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}$ et $V = \frac{10}{13}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ soit une solution particulière

$$X_n^{\mathfrak{p}} = n\frac{1}{13}\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix} + \frac{10}{13}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}5n+10\\8n\end{pmatrix}$$

2. **Les solutions générales** sont donc de la forme $X_n = \alpha V_1 + \beta(-0.3)^n V_2 + X_n^{\mathfrak{p}}$. En posant $X_0 = (a,b)^T$, et en prenant $n = 0$, on voit que α et β sont solutions du système

$$\begin{cases} 5\alpha + \beta = a - \frac{10}{13} \\ 8\alpha - \beta = b \end{cases}$$

On trouve $\alpha = \frac{1}{13}(a + b - \frac{10}{13})$ et $\beta = \frac{1}{13}(8a - 5b - \frac{80}{13})$.
Asymptotique Comme

$$(-0.3)^n \longrightarrow 0,$$

la solution homogène $X_n^{\mathfrak{h}}$ est bornée. Par ailleurs,

$$X_n^{\mathfrak{p}} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}5n+10\\8n\end{pmatrix}$$

tend vers $+\infty$ dans les deux coordonnées. On en déduit que

$$X_n = X_n^{\mathfrak{h}} + X_n^{\mathfrak{p}}$$

tend lui aussi vers $+\infty$ dans les deux coordonnées.

Exercice 31.
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix}-1 & 2\\0 & -1\end{pmatrix}$.
Résoudre l'équation de récurrence (homogène)

$$X_{n+1} = AX_n, \quad X_0 \in \mathbb{R}^2$$

On pourra écrire $A = N - I_2$ et utiliser la formule du binôme

On voit facilement que A n'admet que la valeur propre -1 et n'est pas diagonalisable. Nous allons donc calculer A^n
Posons

$$N = A + I = \begin{pmatrix}0 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}.$$

On remarque que

$$N^2 = 0.$$

Ainsi

$$A = -I + N.$$

Comme I et N commutent, la formule du binôme donne

$$A^n = (-I + N)^n.$$

Or $N^2 = 0$, donc tous les termes contenant une puissance de N supérieure ou égale à 2 sont nuls. Il reste

$$A^n = (-I)^n + n(-I)^{n-1}N.$$

Ainsi

$$A^n = (-1)^n(I - nN).$$

Comme

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on obtient

$$\boxed{A^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Par conséquent,

$$X_n = A^n X_0.$$

Si

$$X_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

alors

$$X_n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$\boxed{X_n = (-1)^n \begin{pmatrix} a - 2nb \\ b \end{pmatrix}.}$$

Exercice 32.
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et le vecteur

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donner la solution générale de l'équation de récurrence

$$X_{n+1} = AX_n + B.$$

1. Résolution de l'équation homogène Considérons d'abord l'équation homogène associée

$$X^{\mathfrak{h}}_{n+1} = AX^{\mathfrak{h}}_n.$$

Valeurs propres Le polynôme caractéristique de A est

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 8.$$

Les valeurs propres sont donc les racines de l'équation

$$\lambda^3 = 8,$$

à savoir

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 2e^{2i\pi/3}, \qquad \lambda_3 = 2e^{-2i\pi/3}.$$

Solution générale La solution générale de l'équation homogène est donc de la forme

$$X_n^{\mathfrak{h}} = 2^n V + 2^n \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) C + 2^n \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) S,$$

où $V, C, S \in \mathbb{R}^3$ sont des vecteurs constants.

2. Recherche d'une solution particulière On cherche une solution particulière constante $X_n = X^{\mathfrak{p}}$. On obtient

$$X^{\mathfrak{p}} = AX^{\mathfrak{p}} + B,$$

c'est-à-dire

$$(I - A)X^{\mathfrak{p}} = B.$$

Comme

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on résout le système

$$\begin{cases} x - 2y = 1, \\ y - 2z = 0, \\ -2x + z = 0. \end{cases}$$

On trouve

$$X^{\mathfrak{p}} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. Solution générale La solution générale de l'équation complète est

$$X_n = 2^n V + 2^n \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) C + 2^n \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) S - \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

où $V, C, S \in \mathbb{R}^3$ sont déterminés à l'aide des conditions initiales.

Exercice 33 (Tiré de la page wikipédia sur les chaines de Markov).
On s'intéresse à une chaine de Markov modélisant un Hamster (Boubou) dans une cage. Boubou à 3 activités (états) possibles : dormir, manger et courir.
Il est susceptible de changer d'activité chaque minute selon les règles suivantes.

- Quand il dort, il a 9 chances sur 10 de ne pas se réveiller la minute suivante.
- Quand il se réveille, il y a 1 chance sur 2 qu'il aille manger et 1 chance sur 2 qu'il parte faire de l'exercice.
- Le repas ne dure qu'une minute, après il fait autre chose.
- Après avoir mangé, il y a 3 chances sur 10 qu'il parte courir dans sa roue, mais surtout 7 chances sur 10 qu'il retourne dormir.
- Courir est fatigant pour Doudou ; il y a 8 chances sur 10 qu'il retourne dormir au bout d'une minute. Sinon il continue en oubliant qu'il est déjà un peu fatigué

On note x_n, y_n et z_n les probabilités respectives d'êtres dans l'état "dormir", "manger" ou "courir" la minute n.
On note $X_n = (x_n, y_n, z_n)^T$ le vecteur de probabilité d'écrivant la répartition des états la minute n.

Soit la matrice de transition $A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.7 & 0.8 \\ 0.05 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$ Pour fixer les idées ont suppose que $X_0 = (1, 0, 0)^T$

1. Justifier que le problème s'écrit
$$X_{n+1} = AX_n$$
.
2. Justifier que X_n est un vecteur de probabilité pour tout $n \in \mathbb{N}$. (C'est-à-dire que X_n a toutes ses composantes positives ou nulles et que leur somme vaut toujours 1).
3. Calculer X_n pour tout n.
4. Le vecteur X_n a-t-il une limite ? Comment interpreter ce résultat ?

1. On note $\{D, M, C\}$ les trois états possibles de Boubou et $E_n \in \{D, M, C\}$ l'état de Boubou au temps n. L'énoncé nous donne les notations $\mathbb{P}(E_n = D) = x_n$, $\mathbb{P}(E_n = M) = y_n$ et $\mathbb{P}(E_n = C) = z_n$. Notons également pour tout $E, J \in \{D, M, C\}$, $\mathbb{P}(E|J)$ la probabilité d'être dans l'état E sachant que Boubou était dans l'état J à l'instant précédent.
   Remarquons que la matrice A contient exactement les probabilité conditionnelle. Par exemple $0.3 = \mathbb{P}(C|M)$. faisons maintenant le bilan de chaque état au temps $n + 1$.
   - $x_{n+1} = \mathbb{P}(E_{n+1} = D)$ est la probabilité que Boubou dorme au temps $n + 1$. Par la formule des probabilités totale, on a
   $$\mathbb{P}(E_{n+1} = D) = \sum_{E \in \{D,M,C\}} \mathbb{P}(D|E)\mathbb{P}(E_n = E)$$
   Soit avec les données de l'énoncée
   $$x_{n+1} = 0.9x_n + 0.7y_n + 0.8z_n.$$
   - De même
   $$\mathbb{P}(E_{n+1} = M) = \sum_{E \in \{D,M,C\}} \mathbb{P}(M|E)\mathbb{P}(E_n = E)$$
   Soit avec les données de l'énoncée
   $$y_{n+1} = 0.05x_n.$$
   - enfin
   $$\mathbb{P}(E_{n+1} = C) = \sum_{E \in \{D,M,C\}} \mathbb{P}(C|E)\mathbb{P}(E_n = E)$$
   Soit avec les données de l'énoncée
   $$z_{n+1} = 0.05x_n + 0.3y_n + 0.2z_n.$$

On obtient donc le système d'équations récurentes linéaires

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0.9x_n + 0.7y_n + 0.8z_n \\ y_{n+1} = 0.05x_n \\ z_{n+1} = 0.05x_n + 0.3y_n + 0.2z_n \end{cases}$$

qui s'écrit exactement sous la forme vectorielle

$$X_{n+1} = AX_n$$

avec X_n et A comme dans l'énoncé.

2. La posititvé est clairement conservé. En multipliant par le vecteur $(1,1,1)$ à gauche on voit que $(x_{n+1} + y_{n+1} + z_{n+1}) = (1,1,1)AX_n = (1,1,1)X_n = (x_n + y_n + z_n)$. La somme est donc constante et comme de plus $x_0 + y_0 + z_0 = 1$ c'est bien un vecteur de probabilité (on peut écrire une récurence immédiate)
3. Le système est homogène, il vient donc

$$X_n = A^n X_0.$$

Pour une expression explicite, il faut calculer A^n.
Le polynôme caractéristique de A est

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 1.1\lambda^2 - 0.105\lambda + 0.005.$$

$\lambda = 1$ est valeur propre évidente (d'ailleurs on le sait car la somme de chaque colonne est 1). Les deux autres valeurs propres sont $\left(\frac{1 \pm i}{20}\right) = \frac{\sqrt{2}}{20} e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$.
On a donc

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

mais avec P et D des matrices avec des nombres complexes.
On obtient donc

$$X_n = v_1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{20}\right)^n \mathrm{Re}\left(v_2 e^{in\pi/4} + v_3 e^{-in\pi/4}\right)$$

avec $v1, v_2$ et v_3 des vecteurs propres à déterminer en fonction de la matrice A et des conditions initiales X_0 (avec v_2 et v_3 complexes).
Ceci peut se réécrire directement en terme réel

$$X_n = v_1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{20}\right)^n \left(u_2 \cos(n\pi/4) + u_3 \sin(n\pi/4)\right).$$

où les v_1 est un vecteur propre pour de A pour 1 et les u_i sont des vecteurs indépendant dépendant de X_0 à déterminer (mais on ne va pas le faire).
4. Comme le terme en facteur des fonctions trigonométriques tend vers 0, on a $X_n \to v_1 = (x^*, y^*, z^*)$. Il suffit de calculer ce vecteur.
Rappellons que $(1,1,1)X_n = 1$ donc $x^* + y^* + z^* = 1$.
De plus v_1 est un vecteur propre positif de A pour la valeur propre 1.
On trouve qu'un vecteur propre pour 1 est

$$v_1 = \alpha \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

pour n'importe quel $\alpha \neq 0$ La normalisation nous donne $20\alpha + \alpha + 13\alpha = 1$ soit $\alpha = \frac{1}{34}$ et finalement

$$X_n \to (20/34, 1/34, 13/34).$$

A la limite (après des variations périodiques initiales), Boubou passe 20/34 de son temps a dormir, 1/34 de son temps a manger et 13/34 de son temps a courir.

Exercice 34.
On s'intéresse à 3 producteurs d'une petite ville et on suit leurs productions d'année en année. L'année $n \in \mathbb{N}$, le premier produit x_n kg de blé, le second produit y_n kg de farine et le troisième z_n kg de pain. On néglige les autres matières.
On considère que les besoins des consommateurs sont constants d'année en année : 200 kg de blé, 500 kg de farine et 1 000 kg de pain.
Chaque année, les producteurs actualisent leur production en fonction des besoins des autres producteurs ; pour cela, ils utilisent les productions de l'année précédente et les règles suivantes :

- pour chaque kilo de farine, il faut 1.5 kg de blé ;
- pour chaque kilo de pain, il faut 0.75 kg de farine ;
- les producteurs mangent : pour chaque kilo de marchandise produite, il faut 0.01 kg de pain.

Enfin, on considère que l'année 0, les productions étaient exactement égales aux besoins des consommateurs.

1. Expliquer pourquoi le système s'écrit
$$\begin{cases} x_{n+1} = 200 + 1.5\, y_n \\ y_{n+1} = 500 + 0.75\, z_n \\ z_{n+1} = 1000 + 0.01(x_n + y_n + z_n) \end{cases}, \qquad (x_0, y_0, z_0) = (200, 500, 1000)$$
2. Résoudre le problème (on ne calculera pas A^n explicitement)
3. Les productions tendent-elles vers une limite ? Si oui, comment interpréter celle-ci ?

1. Lecture directe de l'énoncé.
2. On considère le système
$$\begin{cases} x_{n+1} = 200 + 1{,}5\, y_n \\ y_{n+1} = 500 + 0{,}75\, z_n \\ z_{n+1} = 1000 + 0{,}01(x_n + y_n + z_n) \end{cases} \qquad (x_0, y_0, z_0) = (200, 500, 1000).$$
On pose
$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}75 \\ 0{,}01 & 0{,}01 & 0{,}01 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \\ 1000 \end{pmatrix}.$$
Alors
$$X_{n+1} = A\, X_n + B.$$
(a) **solution stationnaire** Un état stationnaire X^* vérifie
$$X^* = A\, X^* + B \quad \Longleftrightarrow \quad (I_3 - A)X^* = B.$$
Donc
$$X^* = (I_3 - A)^{-1} B.$$
Calcul explicite :
$$y^* = 500 + 0{,}75 z^*, \qquad x^* = 200 + 1{,}5 y^* = 950 + 1{,}125 z^*.$$
En remplaçant dans la troisième équation :
$$z^* = 1000 + 0{,}01(x^* + y^* + z^*)$$
on obtient
$$z^* \approx 1044{,}5, \qquad y^* \approx 1283{,}4, \qquad x^* \approx 2125{,}1.$$

Donc

$$X^* \approx \begin{pmatrix} 2125{,}1 \\ 1283{,}4 \\ 1044{,}5 \end{pmatrix}.$$

(b) **Système homogène et solution générale**

Donc la solution générale est

$$X_n = X^* + A^n(X_0 - X^*).$$

3. **Limites**

Les valeurs propres de A sont de module strictement inférieur à 1, donc

$$A^n \to 0, \qquad X_n \to X^*.$$

Les productions convergent vers l'état stationnaire

$$(2125 \text{ kg de blé},\ 1283 \text{ kg de farine},\ 1045 \text{ kg de pain}),$$

qui représente l'équilibre interne du système : besoins des consommateurs + besoins intermédiaires + consommation des producteurs.

Exercice 35 (Suite récurrente d'ordre 2 et interprétation économique).
On modélise l'écart de production x_n (en centaines de tonnes) d'une entreprise par rapport à une production cible. L'entreprise ajuste sa production en fonction des deux années précédentes, tandis qu'un choc de demande extérieure, supposé décroissant au cours du temps, agit comme un terme source.
On considère la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_{n+2} - 1{,}1\, x_{n+1} + 0{,}24\, x_n = 10 \cdot 0{,}9^n, \qquad (x_0, x_1) = (0, 0).$$

1. Se ramener à une équation récurrente vectorielle d'ordre 1 avec terme source

$$X_{n+1} = AX_n + B_n,$$

en précisant l'expression de A et de B_n.

2. On considère d'abord l'équation homogène associée

$$x_{n+2} - 1{,}1\, x_{n+1} + 0{,}24\, x_n = 0.$$

(a) Déterminer le polynôme caractéristique $P(\lambda)$.

(b) Calculer ses racines et montrer que

$$\lambda_1 = 0{,}8, \qquad \lambda_2 = 0{,}3.$$

(c) En déduire la forme générale des solutions de l'équation homogène.

3. On cherche une solution particulière $x_n^{\mathfrak{p}}$ de l'équation affine

$$x_{n+2} - 1{,}1\, x_{n+1} + 0{,}24\, x_n = 10 \cdot 0{,}9^n.$$

(On pourra chercher une solution particulière de la forme $x_n^{\mathfrak{p}} = K \cdot 0{,}9^n$, où K est une constante réelle.)

4. En déduire l'expression générale de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis déterminer les constantes à l'aide des conditions initiales.

5. Étudier le comportement asymptotique de (x_n) et interpréter économiquement, de manière concise, le rôle :
   - des valeurs propres 0,8 et 0,3,
   - du terme source $10 \cdot 0{,}9^n$.

On a

$$x_{n+2} - 1{,}1\, x_{n+1} + 0{,}24\, x_n = 10 \cdot 0{,}9^n, \qquad (x_0, x_1) = (0, 0).$$

1. On pose

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Alors

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix}.$$

La relation de récurrence donne

$$x_{n+2} = 1{,}1\, x_{n+1} - 0{,}24\, x_n + 10 \cdot 0{,}9^n.$$

Donc

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}24 & 1{,}1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \cdot 0{,}9^n \end{pmatrix} = AX_n + B_n,$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}24 & 1{,}1 \end{pmatrix}, \qquad B_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \cdot 0{,}9^n \end{pmatrix}, \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Équation homogène :

$$x_{n+2} - 1{,}1\, x_{n+1} + 0{,}24\, x_n = 0.$$

(a) Le polynôme caractéristique est

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 1{,}1\, \lambda + 0{,}24.$$

(b) On cherche λ_1, λ_2 telles que

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1{,}1, \qquad \lambda_1 \lambda_2 = 0{,}24.$$

On vérifie que

$$0{,}8 + 0{,}3 = 1{,}1, \qquad 0{,}8 \times 0{,}3 = 0{,}24,$$

donc

$$\lambda_1 = 0{,}8, \qquad \lambda_2 = 0{,}3.$$

(c) La solution générale de l'équation homogène est donc

$$x_n^{\text{h}} = \alpha\, 0{,}8^n + \beta\, 0{,}3^n,$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3. On cherche une solution particulière x_n^{p} de la forme

$$x_n^{\text{p}} = K \cdot 0{,}9^n, \quad K \in \mathbb{R}.$$

On substitue dans l'équation affine :

$$x_{n+2}^{\text{p}} - 1{,}1\, x_{n+1}^{\text{p}} + 0{,}24\, x_n^{\text{p}} = 10 \cdot 0{,}9^n.$$

Or

$$x_{n+2}^{\text{p}} = K \cdot 0{,}9^{n+2} = K \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}9^n, \quad x_{n+1}^{\text{p}} = K \cdot 0{,}9^{n+1} = K \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9^n, \quad x_n^{\text{p}} = K \cdot 0{,}9^n.$$

Donc

$$K \left(0{,}9^2 - 1{,}1 \cdot 0{,}9 + 0{,}24\right) 0{,}9^n = 10 \cdot 0{,}9^n.$$

On simplifie par $0{,}9^n \neq 0$:

$$K\,(0{,}81 - 0{,}99 + 0{,}24) = 10 \quad\Longrightarrow\quad K \cdot 0{,}06 = 10 \quad\Longrightarrow\quad K = \frac{10}{0{,}06} = \frac{500}{3}.$$

On obtient donc une solution particulière :

$$x_n^{\mathfrak{p}} = \frac{500}{3}\,0{,}9^n.$$

4. La solution générale de l'équation affine est

$$x_n = x_n^{\mathfrak{h}} + x_n^{\mathfrak{p}} = \alpha\,0{,}8^n + \beta\,0{,}3^n + \frac{500}{3}\,0{,}9^n.$$

On utilise les conditions initiales.
Pour $n = 0$:

$$x_0 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \alpha + \beta + \frac{500}{3} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \alpha + \beta = -\frac{500}{3}.$$

Pour $n = 1$:

$$x_1 = 0 \quad\Longrightarrow\quad 0{,}8\alpha + 0{,}3\beta + \frac{500}{3}\,0{,}9 = 0.$$

Or $\dfrac{500}{3} \cdot 0{,}9 = \dfrac{500}{3} \cdot \dfrac{9}{10} = 150$, donc

$$0{,}8\alpha + 0{,}3\beta + 150 = 0 \quad\Longrightarrow\quad 0{,}8\alpha + 0{,}3\beta = -150.$$

On résout le système

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\dfrac{500}{3}, \\ 0{,}8\alpha + 0{,}3\beta = -150. \end{cases}$$

De la première équation, $\beta = -\dfrac{500}{3} - \alpha$. En remplaçant dans la seconde :

$$0{,}8\alpha + 0{,}3\left(-\frac{500}{3} - \alpha\right) = -150 \quad\Longrightarrow\quad 0{,}8\alpha - \frac{500}{10} - 0{,}3\alpha = -150$$
$$\Longrightarrow\quad 0{,}5\alpha - 50 = -150 \quad\Longrightarrow\quad 0{,}5\alpha = -100 \quad\Longrightarrow\quad \alpha = -200.$$

Alors

$$\beta = -\frac{500}{3} - (-200) = -\frac{500}{3} + 200 = \frac{100}{3}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = -200 \cdot 0{,}8^n + \frac{100}{3} \cdot 0{,}3^n + \frac{500}{3} \cdot 0{,}9^n.$$

5. **Comportement asymptotique et interprétation.**
On a

$$|0{,}3| < |0{,}8| < |0{,}9| < 1.$$

Donc, quand $n \to +\infty$,

$$0{,}3^n \to 0, \quad 0{,}8^n \to 0, \quad 0{,}9^n \to 0,$$

et

$$x_n \sim \frac{500}{3} \cdot 0{,}9^n.$$

La contribution des valeurs propres 0,8 et 0,3 (dynamique interne de l'entreprise) décroît plus vite que celle du terme source $10 \cdot 0{,}9^n$. Asymptotiquement, le comportement de x_n est dominé par le choc de demande extérieur, lui-même décroissant. On a donc

$$x_n \to 0, \qquad \frac{x_{n+1}}{x_n} \to 0{,}9 \quad (\text{si } x_n \neq 0).$$

Interprétation économique concise. Les valeurs propres 0,8 et 0,3 traduisent une dynamique interne stable : l'entreprise, sans choc extérieur, corrige progressivement ses écarts de production. Le terme source $10 \cdot 0{,}9^n$ représente un choc de demande décroissant : son influence domine à moyen terme, puis disparaît. Au final, l'écart de production x_n revient à 0 : l'entreprise finit par se réaligner sur sa production cible, et la mémoire du choc économique s'efface à un rythme gouverné par le facteur $0{,}9^n$.

Exercice 36 (Suite récurrente d'ordre 3 avec oscillations).
On considère la suite vectorielle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_{n+3} + x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0, \qquad (x_0, x_1, x_2) = (1, 0, 0).$$

1. Se ramener à une équation récurente vectorielle d'ordre 1 homogène.

$$X_{n+1} = AX_n.$$

2. Montrer que les valeurs propres de A sont :

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_{2,3} = \frac{1}{2}\left(1 \pm i\sqrt{3}\right) = e^{\pm i\pi/3}.$$

3. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est oscillante et périodique.
4. Donner l'expression explicite de x_n.

1. . On pose

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix}.$$

Alors, en utilisant la relation de récurrence,

$$x_{n+3} = -x_{n+2} - x_{n+1} - x_n,$$

on obtient

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ x_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix} = AX_n,$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Le polynôme caractéristique de A est

$$P(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1.$$

On factorise :

$$P(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda + 1).$$

On en déduit :

$$\lambda_1 = -1,$$

et les deux autres racines sont celles de $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, donc

$$\lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm i\sqrt{3}\right) e^{\pm i\pi} = e^{\pm i\pi/3},$$

d'où bien

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_{2,3} = e^{\pm i\pi/3}.$$

3. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est oscillante et périodique.
   La récurrence linéaire associée à P a pour solution générale réelle

$$x_n = \alpha(-1)^n + \beta\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \gamma\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right),$$

   où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
   Les trois termes $(-1)^n$, $\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ sont périodiques :

$$(-1)^n \text{ est de période 2,} \qquad \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right),\ \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \text{ sont de période 6.}$$

   Donc x_n est périodique de période 6 (au plus), et en particulier elle est oscillante (elle change de signe, ne converge pas, est bornée et périodique).
4. Donner l'expression explicite de x_n.
   On utilise les conditions initiales :

$$x_n = A(-1)^n + B\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + C\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right).$$

   Pour $n = 0$:

$$x_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad A + B = 1.$$

   Pour $n = 1$:

$$x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad -A + B\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + C\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow -A + \frac{1}{2}B + \frac{\sqrt{3}}{2}C = 0.$$

   Pour $n = 2$:

$$x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad A + B\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + C\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow A - \frac{1}{2}B + \frac{\sqrt{3}}{2}C = 0.$$

   On résout le système :

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ -A + \frac{1}{2}B + \frac{\sqrt{3}}{2}C = 0, \\ A - \frac{1}{2}B + \frac{\sqrt{3}}{2}C = 0. \end{cases}$$

   En soustrayant les deux dernières équations, on obtient

$$-3A + 1 + \sqrt{3}C = 0, \qquad 3A - 1 + \sqrt{3}C = 0$$

   d'où

$$A = \frac{1}{3}, \qquad C = 0, \qquad B = 1 - A = \frac{2}{3}.$$

   Ainsi

$$x_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right).$$

   On vérifie directement que cette suite est périodique de période 6 :

$$x_{n+6} = x_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercice 37 (A preparer pour le CM5).
Résoudre sur $\mathbb{R}$, sauf mention explicite, les équations différentielles suivantes.

1. $y'(t) = 0$;

   $y'(t) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R},\ y(t) = C\ \forall t \in \mathbb{R}$

2. $y'(x) + 2x = 0$ et $y(0) = 10$;

   $y'(x) + 2x = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y'(x) = -2x,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R},\ y(x) = -x^2 + C\ \forall x \in \mathbb{R}$
   $y(0) = 10 \Rightarrow C = 10$ Donc $y(x) = -x^2 + 10\ \forall x \in \mathbb{R}$

3. $y'(t) = 3te^{t^2}$;

   $y'(t) = 3te^{t^2},\ \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R},\ y(t) = \dfrac{3}{2}e^{t^2} + C\ \forall t \in \mathbb{R}$

4. $y'(t) = \dfrac{2t}{t^2 + e}$ et $y(0) = 2$;

   $y'(t) = \dfrac{2t}{t^2 + e},\ \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R},\ y(t) = \ln\left(t^2 + e\right) + C\ \forall t \in \mathbb{R}$
   $y(0) = 2 \Rightarrow \ln(e) + C = 2 \Leftrightarrow C = 1$ Donc $y(t) = \ln\left(t^2 + e\right) + 1\ \forall t \in \mathbb{R}$

5. $y'(x) = \sin(x)\cos(x)$;

   cos étant la dérivée de sin, on reconnaît la forme $u'u$ qui est la dérivée de $\dfrac{1}{2}u^2$.
   $y'(x) = \sin(x)\cos(x), \forall x \in \mathbb{R} \iff \exists C \in \mathbb{R},\ y(x) = \dfrac{1}{2}\sin^2(x) + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$
   On a aussi $\exists \widetilde{C} \in \mathbb{R},\ y(x) = -\dfrac{1}{2}\cos^2(x) + \widetilde{C},\ \forall x \in \mathbb{R}$

6. $y'(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ sur $\mathbb{R}_+$;

   $y'(x) = \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{x+1-2}{x+1} = 1 - \dfrac{2}{x+1}$
   $y'(x) = \dfrac{x-1}{x+1},\ \forall x \in \mathbb{R} \iff \exists C \in \mathbb{R},\ y(x) = x - 2\ln(x+1) + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$

7. $y'(t) = \dfrac{t^3}{t^4 + a}$ avec $a \in \mathbb{R}_+$;

   $y'(t) = \dfrac{t^3}{t^4 + a},\ \forall t \in \mathbb{R} \iff y'(t) = \dfrac{1}{4}\dfrac{4t^3}{t^4 + a},\ \forall t \in \mathbb{R} \iff \exists C \in \mathbb{R},\ y(t) = \dfrac{1}{4}\ln\left(x^4 + \alpha\right),\ \forall t \in \mathbb{R}$

8. $y'(x) = \dfrac{\alpha(x+3)}{x^2 + 6x - 40}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

   On peut remarquer que $x^2 + 6x - 40 > 0$ pour tout réel x et que $y'(x) = \dfrac{\alpha(x+3)}{x^2 + 6x - 40} = \dfrac{\alpha}{2}\dfrac{2x+6}{x^2 + 6x - 40}$.
   $y'(x) = \dfrac{\alpha(x+3)}{x^2 + 6x - 40},\ \forall x \in \mathbb{R} \iff \exists C \in \mathbb{R},\ y(x) = \dfrac{\alpha}{2}\ln\left(x^2 + 6x - 40\right) + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$

Exercice 38.
Soit $a \in \mathbb{R}$. En utilisant vos connaissances sur les équations différentielles linéaires d'ordre 1 (homogènes), trouver tous les fonctions f définies sur $\mathbb{R}_+^*$ dont l'élasticité $E\ell_x(f)(x) = x\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ vaut :

De façon générale, pour tout réel x strictement positif, on a :
$E\ell_x(f)(x) = E(x) \iff x\dfrac{f'(x)}{f(x)} = E(x) \iff xf'(x) = E(x)f(x) \iff f'(x) - \dfrac{E(x)}{x}f(x) = 0$
Donc rechercher les fonctions dont l'élasticité a une certaine forme revient à résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène.

1. $E\ell_x(f)(x) = a$;

   On cherche f telle que $f'(x) - \dfrac{a}{x}f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$
   Une primitive de $x \mapsto -\dfrac{a}{x}$ est $x \mapsto -a\ln(x)$. Donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ ayant leur élasticité de la forme demandée sont les fonctions de la forme $x \mapsto ke^{a\ln(x)} = kx^a$. Donc les fonctions à élasticité constantes sont les fonctions puissances.

2. $E\ell_x(f)(x) = ax$;

   On cherche f telle que $f'(x) - af(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$
   Une primitive de $x \mapsto -a$ est $x \mapsto -ax$. Donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ ayant leur élasticité de la forme demandée sont les fonctions de la forme $x \mapsto ke^{ax}$.

3. $E\ell_x(f)(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$;

   On cherche f telle que $f'(x) - \dfrac{1}{x\ln(x)}f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$
   Une primitive de $x \mapsto -\dfrac{1}{x\ln(x)} = -\dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{\ln(x)}$ est $x \mapsto -\ln(|\ln(x)|)$. Donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ ayant leur élasticité de la forme demandée sont les fonctions de la forme $x \mapsto ke^{\ln(|\ln(x)|)} = k|\ln(x)|$.

4. $E\ell_x(f)(x) = \dfrac{1}{\ln(x)} + a$.

   On cherche f telle que $f'(x) - \dfrac{\frac{1}{\ln(x)} + a}{x}f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \iff f'(x) - \left(\dfrac{1}{x\ln(x)} + \dfrac{a}{x}\right)f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$
   Une primitive de $x \mapsto -\left(\dfrac{1}{x\ln(x)} + \dfrac{a}{x}\right)$ est $x \mapsto -\ln(|\ln(x)|) - a\ln(x)$. Donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ ayant leur élasticité de la forme demandée sont les fonctions de la forme $x \mapsto ke^{\ln(|\ln(x)|)+a\ln(x)} = kx^a|\ln(x)|$.

Exercice 39 (À préparer pour le TD4).
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

1. $y' + 2y = 0$;

   $\mathcal{S}_H = \left\{x \mapsto Ke^{-2x}\ ;\ K \in \mathbb{R}\right\}$.

2. $y' + 2y = 3$;

   $\mathcal{S}_E = \left\{x \mapsto Ke^{-2x} + \dfrac{3}{2}\ ;\ K \in \mathbb{R}\right\}$.

3. $y' + 2y = 3$ et $y(0) = -1$.

   $-1 = y(0) = Ke^{-2\times 0} + \dfrac{3}{2} = K + \dfrac{3}{2} \Rightarrow K = -\dfrac{5}{2}$.
   L'unique solution est donc la fonction $x \mapsto -\dfrac{5}{2}e^{-2x} + \dfrac{3}{2}$.

Exercice 40.
Soit (E) l'équation différentielle $y' - 2y = -4t$ où y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' sa fonction dérivée.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E_0) sans second membre associée.

   Solution de l'équation homogène : $\mathcal{S}_{E_0} = \left\{x \mapsto Ke^{2x} \ ; \ K \in \mathbb{R}\right\}$.

2. Déterminer une solution particulière y_p de (E). En déduire les solutions générales de (E).

   Recherche d'une solution particulière :
   - Méthode de la variation de la constante : $y_p(t) = K(t)e^{2t}$ donc $y'(t) = K'(t)e^{2t} + 2K(t)e^{2t}$.
     En mettant ces deux expressions dans l'équation de départ, on obtient $K'(t) = -4te^{-2t}$. On peut obtenir une primitive par intégration par parties. Mais il y a plus simple ici.
   - Recherche d'une solution particulière de la forme $y_p(x) = ax+b$: on a alors $y_p'(x) = a$. En mettant ces deux expressions dans l'équation de départ, on obtient $a-2b-2ax = -4x \iff (4-2a)x+a-2b = 0$ qui doit être vérifié pour tout réel x. Ainsi on a forcément $\begin{cases} 4-2a=0 \\ a-2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$ et on obtient la solution particulière $y_p(x) = 2x+1$.
     $\mathcal{S}_E = \left\{x \mapsto Ke^{2x} + 2x + 1 \ ; \ K \in \mathbb{R}\right\}$

3. En déduire une solution de (E) vérifiant la condition $y(0) = 3$.

   Condition initiale : $y(0) = 3 \Leftrightarrow K + 1 = 3 \Leftrightarrow K = 2$.
   La solution finale est la fonction $x \mapsto 2e^{2x} + 2x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 41.
On considère l'équation différentielle

$$(E) \ : \ y' + y = \frac{1}{1+e^x}$$

où y est une fonction de la variable x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' sa fonction dérivée.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + y = 0$.

   $\mathcal{S}_{(E_0)} = \left\{x \mapsto Ke^{-x} \ ; \ K \in \mathbb{R}\right\}$

2. Déterminer une solution particulière y_p de (E). En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

   On obtient $k'(x)e^{-x} = \dfrac{1}{1+e^x} \Leftrightarrow k'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$. On peut choisir $k(x) = \ln(1+e^x)$. Ainsi on obtient comme solution particulière : $y_p(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$.
   $\mathcal{S}_{(E)} = \left\{x \mapsto e^{-x}\left(K + \ln(1+e^x)\right) \ ; \ K \in \mathbb{R}\right\}$

3. Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1 + \ln(2)$.

   $f(0) = 1 + \ln(2) \Rightarrow K + \ln(2) = 1 + \ln(2) \Leftrightarrow K = 1$
   Ainsi l'unique solution de (E) vérifiant la condition $f(0) = 1 + \ln(2)$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}\left(1 + \ln(1+e^x)\right)$.

Exercice 42.
Soit l'équation différentielle

$$(E) \ : \ (1+x)y' - y = \ln\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $[0 \ ; \ +\infty[$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+$ l'équation différentielle : (E') : $(1+x)y' - y = 0$.

   Pour tout réel x positif ou nul, $1 + x \neq 0$ donc $(E_0) \Leftrightarrow y' - \dfrac{1}{1+x}y = 0$. On obtient alors :
   $\mathcal{S}_{(E')} = \left\{x \mapsto Ke^{\ln(1+x)} = K(1+x) \ ; \ K \in \mathbb{R}\right\}$.

2. Déterminer la valeur de la constante C pour que la fonction $y_0(x) = \ln(1+x) + C$ soit une solution particulière de l'équation (E), définie sur $\mathbb{R}_+$. En déduire la solution générale de l'équation (E).

   $y_0'(x) = \dfrac{1}{1+x} \Rightarrow (1+x) \times \dfrac{1}{1+x} - \ln(1+x) - C = \ln\left(\dfrac{1}{1+x}\right),\ \forall x$

   $\Leftrightarrow 1 - \ln(1+x) - C = -\ln(1+x),\ \forall x \Leftrightarrow C = 1.$

   Une solution particulière est la fonction $y_0(x) = \ln(1+x) + 1$.
   $\mathcal{S}_{(E)} = \left\{x \mapsto Ke^{\ln(1+x)} = K(1+x) + \ln(1+x) + 1\ ;\ K \in \mathbb{R}\right\}$.

3. Déterminer la fonction Φ solution de l'équation (E) vérifiant : $\Phi(0) = 0$.

   $\Phi(0) = 0 \Leftrightarrow K + 1 = 0 \Leftrightarrow K = -1$.
   Ainsi l'unique solution de (E) vérifiant la condition $\Phi(0) = 0$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(x) = -1(1+x) + \ln(1+x) + 1 = \ln(1+x) - x$.

Exercice 43.
On souhaite étudier la meilleure fenêtre de temps pour boire notre café à la bonne température. D'après Wikipédia, on a l'information suivante.

> La loi de refroidissement de Newton, énoncée par Isaac Newton, stipule que le taux de perte de chaleur d'un corps est proportionnel à la différence de température entre le corps et le milieu environnant. Cette formulation n'est pas très précise, et présuppose un milieu et un corps homogène ainsi qu'un milieu à température constante.

On peut en déduire une version simplifiée de l'évolution de la chaleur y du corps étudié (en degré Celsius) selon le temps t (en minutes).

$$(E_R)\ :\ y'(t) = -r(y(t) - T),\ \forall t \in [0; +\infty[$$

avec r le coefficient de refroidissement, qui est une constante positive dépendant de l'environnement, et T la température ambiante (en degré Celsius).

1. Donner l'équation homogène associée à (E_R) ainsi que son ensemble de solutions.

   $(E_R)\ :\ y'(t) + ry(t) = rT,\ \forall t \in [0; +\infty[$
   d'où $(H_R)\ :\ y'(t) + ry(t) = 0,\ \forall t \in [0; +\infty[$
   Et $\mathcal{S}_{H_R} = \left\{t \mapsto \lambda e^{-rt}\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

2. Donner une solution particulière de (E_R).

   Il s'agit d'une équation linéaire à coefficient constant et second membre constant, il existe une solution particulière constante, ici $y_p(t) = T$.

3. En déduire l'ensemble des solutions de (E_R).

   Ainsi on a $\mathcal{S}_{E_R} = \left\{t \mapsto \lambda e^{-rt} + T\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

4. Commenter l'évolution à long terme de la température du corps.

   on remarque que peu importe la température initiale, la température du corps va tendre vers la température ambiante T.

5. Je souhaite maintenant appliquer tout cela à mes tasses de café.
   Lors d'une première expérience dans mon bureau ayant une température ambiante de 20°C, j'ai préparé un café à 90°C à l'instant initial $t = 0$ et au bout de 10 minutes, il était parfait à 55°C.

   (a) En déduire la valeur du coefficient de refroidissement au centième près.

   Les informations se traduisent par $T = 20$, $y(0) = 90$ et $y(10) = 55$.

Ainsi on a $\begin{cases} y(t) = \lambda e^{-rt} + 20 \\ y(0) = 90 \\ y(10) = 55 \end{cases}$.

On obtient $\lambda = y(0) - T = 70$ et $r = \dfrac{1}{10} \ln\left(\dfrac{y(0)-T}{y(10)-T}\right) = \dfrac{\ln(2)}{10} \simeq 0.07$

(b) Si je prépare un café dans les mêmes conditions, donner la fenêtre de consommation pendant laquelle, selon cette modélisation, le café sera entre 50°C et 60°C.

Ainsi $y(t) = 70e^{-0.07t} + 20$, pour tout réel positif t.
$y(t) = T_1 \iff t = \dfrac{10}{7} \ln\left(\dfrac{70}{T_1 - 20}\right)$
Pour $T_1 = 50$, on obtient $t = 12.10$
Et pour $T_1 = 60$, on a $t = 7.99$
Ainsi le créneau de consommation idéale de mon café est entre 8 et 12 minutes après l'avoir fait.

Exercice 44.
On note $y(t)$ le nombre de personnes dont les foyers sont équipés d'une liaison internet et on suppose que le taux selon lequel de nouvelles personnes obtiennent l'accès est proportionnel au nombre de personnes qui n'ont pas encore l'accès. Du coup, si P désigne la taille de la population, l'équation différentielle vérifiée par y est alors

$$(E) \ : \ y'(t) = k(P - y(t)),$$

où k est une constante strictement positive.

1. On fixe $P = 10$ et $k = 2$.

(a) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans ce cadre.

$(E) \ : \ y' = 2(10 - y) \Leftrightarrow y' = 20 - 2y \Leftrightarrow y' + 2y = 20$
L'équation homogène associée est $(H) \ : \ y' + 2y = 0$. L'ensemble des solutions de (H) est $\mathcal{S}_H = \left\{x \mapsto Ke^{-2x}, \ K \in \mathbb{R}\right\}$.
Ensuite on cherche une solution particulière de (E). Comme le second membre est une constante, on cherche une solution sous forme de constante. On trouve $y_p(x) = 10$.
Ainsi l'ensemble des solutions de (E) est $\mathcal{S}_E = \left\{x \mapsto Ke^{-2x} + 10, \ K \in \mathbb{R}\right\}$.

(b) Déterminer la solution de (E) compte tenu de $y(0) = 0$, toujours pour $P = 10$ et $k = 2$.

$y(0) = Ke^{-2\times 0} + 10 = 0 \Leftrightarrow K + 10 = 0 \Leftrightarrow K = -10$
Ainsi la solution de (E) qui vérifie $y(0) = 0$ est la fonction $y(x) = -10e^{-2x} + 10$.

(c) Résoudre l'équation $y' + 2y = 20 + \dfrac{e^{-2t}}{t^2}$.

En appliquant le principe de superposition, il reste à trouver une solution particulière de l'équation $(E') \ : \ y' + 2y = \dfrac{e^{-2t}}{t^2}$. On va utiliser la méthode de la variation de la constante. On cherche donc une solution particulière de la forme $y_0(x) = k(x)e^{-2x}$.
$y_0'(x) = k'(x)e^{-2x} - 2k(x)e^{-2x}$ donc si y_0 est solution de (E'), alors on a
$y_0'(x) + 2y_0(x) = \dfrac{e^{-2x}}{x^2} \Leftrightarrow k'(x)e^{-2x} = \dfrac{e^{-2x}}{x^2} \Leftrightarrow k'(x) = \dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow k(x) = -\dfrac{1}{x} + C, \text{ avec } C \in \mathbb{R}$
Donc une solution particulière de (E') est la fonction $y_0(x) = -\dfrac{e^{-2x}}{x}$.

Par principe de superposition, l'ensemble des solutions de l'équation $y' + 2y = 20 + \dfrac{e^{-2t}}{t^2}$ est $\mathcal{S} = \left\{x \mapsto Ke^{-2x} + 10 - \dfrac{e^{-2x}}{x}, \ K \in \mathbb{R}\right\}$.

2. On ne se fixe plus de valeurs pour P et k.

(a) Déterminer la solution de (E) compte tenu de $y(0) = 0$ en fonction de P et k.

$(E)\ :\ y'(t) = k(P - y(t)) \Leftrightarrow y'(t) + ky(t) = kP$
L'ensemble des solutions de l'équation homogène est $\left\{x \mapsto Ke^{-kx},\ K \in \mathbb{R}\right\}$.
La fonction $y_0(x) = P$ est une solution particulière de (E).
Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $\left\{x \mapsto Ke^{-kx} + P,\ K \in \mathbb{R}\right\}$.
On cherche l'unique solution qui vérifie $y(0) = 0$: $y(0) = Ke^{-k\times 0} + P = 0 \Leftrightarrow K = -P$.
Donc l'unique solution de (E) qui vérifie $y(0) = 0$ est la fonction $y(x) = -Pe^{-kx} + P = P(1 - e^{-kx})$.

(b) Déterminer la limite en $+\infty$ de y en fonction de P et k. Interpréter.

Comme k est une constante strictement positive, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-kx} = 0$. Ainsi on a $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = P$.
Ce résultat signifie qu'à long terme la couverture internet de la population va tendre à être totale (car P correspond à la taille de la population).

Exercice 45.
On considère le marché d'un bien sur lequel se confrontent, à chaque instant t, une offre S et une demande D. On note P le prix constaté et $\widehat{P}$ le prix espéré par les producteurs. Toutes les fonctions P, $\widehat{P}$, S et D sont supposées continues et dérivables. On suppose également que le prix s'ajuste à un niveau assurant l'équilibre entre l'offre et la demande et que les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} S(t) &= a\widehat{P}(t) - 20 \\ D(t) &= -bP(t) + 200 \\ \widehat{P}(t) &= P(t) + dP'(t) \end{cases}$$

avec a, b et d trois réels tels que $a > 0$, $b > 0$ et $d \neq 0$.

1. Déterminer une équation différentielle (E) vérifiée par la fonction de prix faisant intervenir uniquement a, b et d.

$S(t) = D(t),\ \forall t \Leftrightarrow a\widehat{P}(t) - 20 = -bP(t) + 200,\ \forall t \Leftrightarrow \widehat{P}(t) = -\dfrac{b}{a}P(t) + \dfrac{220}{a},\ \forall t$
$\widehat{P}(t) = P(t) + dP'(t),\ \forall t \Leftrightarrow -\dfrac{b}{a}P(t) + \dfrac{220}{a} = P(t) + dP'(t),\ \forall t \Leftrightarrow P'(t) + \dfrac{a+b}{ad}P(t) = \dfrac{220}{ad},\ \forall t$

2. Résoudre l'équation homogène associée à (E).

$(H)\ :\ P'(t) + \dfrac{a+b}{ad}P(t) = 0,\ \forall t$ et $S_H = \left\{t \mapsto Ke^{-\frac{a+b}{ad}t}\ ;\ K \in \mathbb{R}\right\}$

3. Trouver une solution particulière constante de (E).

$P_p(t) = \dfrac{220}{a+b}$

4. Donner la solution de (E) correspondant à un prix initial $P_0 = P(0)$.

$y(t) = Ke^{-\frac{a+b}{ad}t} + \dfrac{220}{a+b}$: $P(0) = K + \dfrac{220}{a+b}$ donc $K = P_0 - \dfrac{220}{a+b}$
Donc la solution de (E) correspondant à un prix initial $P_0 = P(0)$ est
$P(t) = \left(P_0 - \dfrac{220}{a+b}\right)e^{-\frac{a+b}{ad}t} + \dfrac{220}{a+b}$, pour tout réel t.

5. Discuter du comportement asymptotique du prix.

$-\dfrac{a+b}{ad} < 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\frac{a+b}{ad}t} = 0$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} P(t) = \dfrac{220}{a+b}$.

6. Déterminer la solution correspondant au cas où $a = 3$, $b = 2$, $d = 5/3$, $P_0 = 30$.

$P(t) = 44 - 14e^{-t}$, pour tout réel t

Exercice 46.
Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ les équations différentielles suivantes, selon les valeurs des différents paramètres intervenants :

1. $my'(t) - y(t) = e^{2t}$ et $y(0) = 0$ avec $m > \dfrac{1}{2}$;

   (E) : $y'(t) - \dfrac{1}{m}y(t) = \dfrac{1}{m}e^{2t}$, $S_H = \left\{t \mapsto Ke^{\frac{1}{m}t} \ ; \ K \in \mathbb{R}\right\}$
   MVC : $K'(t) = \dfrac{1}{m}e^{\frac{2m-1}{m}t}$ et on peut choisir $K(t) = \dfrac{1}{2m-1}e^{\frac{2m-1}{m}t}$. Donc la fonction $y_p(t) = \dfrac{1}{2m-1}e^{2t}$ est une solution particulière.
   $S_E = \left\{t \mapsto Ke^{\frac{1}{m}t} + \dfrac{1}{2m-1}e^{2t} \ ; \ K \in \mathbb{R}\right\}$
   $y(0) = 0 \Rightarrow K = -\dfrac{1}{2m-1}$ Donc $y(t) = \dfrac{1}{2m-1}\left(e^{2t} - e^{\frac{1}{m}t}\right)$, pour tout réel t.

2. $y'(t) - 2ty(t) = \alpha t$;

   $S_H = \left\{t \mapsto Ke^{t^2} \quad K \in \mathbb{R}\right\}$, Solution particulière : $y_p(t) = -\dfrac{\alpha}{2}$
   $S_E = \left\{t \mapsto Ke^{t^2} - \dfrac{\alpha}{2} \quad K \in \mathbb{R}\right\}$

3. $ty'(t) - my(t) = \beta t^\alpha$.

   Résolution sur $\mathbb{R}_+^*$: (E) : $y'(t) - m\dfrac{1}{t}y(t) = \beta t^{\alpha-1}$
   $S_H = \{t \mapsto Kt^m \ ; \ K \in \mathbb{R}\}$
   Solution particulière : $y_p(t) = \dfrac{\beta}{\alpha - m}t^\alpha$, si $\alpha \neq m$, directement.
   MVC : $K'(t) = \beta t^{(\alpha-m)-1}$.
   Si $\alpha \neq m$, $K(t) = \beta\dfrac{t^{\alpha-m}}{\alpha-m}$ et on retrouve $y_p(t) = \dfrac{\beta}{\alpha-m}t^\alpha$.
   Si $\alpha = m$, $K(t) = \beta\ln(t)$ et $y_p(t) = \beta\ln(t)t^m$.

Exercice 47.
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

1. $y' + y = 4$;

   On a $y_0(x) = Ke^{-x}$ et $y_p(x) = 4$. Donc $\mathcal{S}_2 = \{x \mapsto Ke^{-x} + 4 \ ; \ K \in \mathbb{R}\}$.

2. $y' - y = e^t$, $y(0) = -2$;

   $\mathcal{S}_{H,5} = \{x \mapsto Ke^x \ ; \ K \in \mathbb{R}\}$
   Méthode de la variation de la constante : on pose $y_p(t) = K(t)e^t$ ainsi on a $y'(t) = K'(t)e^t + K(t)e^t$.
   En mettant ces deux expressions dans l'équation de départ, on obtient $K'(t) = 1$. On peut choisir $K(t) = t$. Ainsi $y_p(t) = te^t$ est une solution particulière.
   Sans condition initiale, les solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto (K + x)e^x$ avec K un réel quelconque.
   Condition initiale : $y(0) = -2 \Leftrightarrow K = -2$.
   La solution finale est la fonction $x \mapsto (x - 2)e^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

3. $y' - y = 1 - t$, $y(0) = 1$;

   $\mathcal{S}_{H,6} = \{x \mapsto Ke^x \ ; \ K \in \mathbb{R}\}$
   Solution particulière de la forme $y_p(x) = ax + b$: on obtient $a = 1$ et $b = 0$. La fonction $y_p(x) = x$ est donc une solution particulière.
   Sans condition initiale : $\mathcal{S}_6 = \{x \mapsto Ke^x + x \ ; \ K \in \mathbb{R}\}$
   Condition initiale : $y(0) = 1 \Leftrightarrow K = 1$.
   La solution finale est la fonction $x \mapsto e^x + x$ définie sur $\mathbb{R}$.

4. $y' - 4y = x^2$;

   $\mathcal{S}_{H,7} = \left\{x \mapsto Ke^{4x} \ ; \ K \in \mathbb{R}\right\}$

   Solution particulière de la forme $y_p(x) = ax^2 + bx + c$: on trouve $y_p(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}$.

   Ainsi on obtient $\mathcal{S}_7 = \left\{x \mapsto Ke^{4x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{1}{32} \ ; \ K \in \mathbb{R}\right\}$

5. $2y' - y = -t^2 + 5t$, $y(-1) = 5$;

   $\mathcal{S}_{(E_0)} = \left\{x \mapsto Ke^{\frac{1}{2}x} \ ; \ K \in \mathbb{R}\right\}$

   Recherche d'une solution particulière de la forme $y_0(t) = At^2 + Bt + C$:

   $y_0'(t) = 2At + B \Rightarrow 4At + 2B - At^2 - Bt - C = -At^2 + (4A - B)t + 2B - C = -t^2 + 5t, \ \forall t \in \mathbb{R}$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = -2 \end{cases}$$

   Une solution particulière est la fonction $y_p(t) = t^2 - t - 2$ définie sur $\mathbb{R}$.

   Solutions générales de (E) : $\mathcal{S}_{(E)} = \left\{x \mapsto Ke^{\frac{1}{2}x} + t^2 - t - 2 \ ; \ K \in \mathbb{R}\right\}$

   Avec condition initiale : $y(-1) = 5 \Leftrightarrow Ke^{-\frac{1}{2}} + 1 + 1 - 2 = 5 \Leftrightarrow K = 5e^{\frac{1}{2}}$

   Ainsi l'unique solution de (E) vérifiant la condition $y(-1) = 5$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = 5e^{\frac{1}{2}(x+1)} + t^2 - t - 2$.

6. $y' - 4y = x^2 + 2e^x$, $y(0) = 0$.

   Recherche d'une solution particulière si le second membre est $2e^x$ par la méthode de la variation de la constante : $y_p(x) = K(x)e^{4x}$, on obtient $K'(x) = 2e^{-3t}$ et on peut choisir $K(x) = -\frac{2}{3}e^{-3t}$. On obtient alors comme solution particulière $y_p(x) = -\frac{2}{3}e^x$.

   Sans condition initiale : $\mathcal{S}_7 = \left\{x \mapsto Ke^{4x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{1}{32} - \frac{2}{3}e^x \ ; \ K \in \mathbb{R}\right\}$

   Condition initiale : $y(0) = 0 \Leftrightarrow K - \frac{1}{32} - \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow K = \frac{67}{96}$.

   La solution finale est la fonction $x \mapsto \frac{67}{96}e^{4x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{1}{32} - \frac{2}{3}e^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

7. $y' - 2xy = -2x$, $y(0) = -2$ sur $\mathbb{R}$;

   Cette équation est de la forme $y' + \beta(x)y = 0$ avec $\beta(x) = -2x$. Une primitive de β est la fonction $B(x) = -x^2$. Donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $y_H(x) = Ke^{x^2}$ avec K un réel quelconque.

   On remarque que $y_p(x) = 1$ est une solution particulière.

   Sans condition initiale : $\mathcal{S}_1 = \left\{x \mapsto Ke^{x^2} + 1 \ ; \ K \in \mathbb{R}\right\}$.

   Condition initiale : $y(0) = -2 \Leftrightarrow K + 1 = -2 \Leftrightarrow K = -3$.

   Ainsi l'unique solution finale de l'équation est la fonction $x \mapsto -3e^{x^2} + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

8. $(1 + x^2)y' + 2xy = 0$, $y(1) = 2$ sur $\mathbb{R}$.

   Cherchons les solutions de l'équation homogène : $(H) : (1 + x^2)y' + 2xy = 0$.

   Comme $1 + x^2$ ne s'annule jamais, l'équation homogène est équivalente à l'équation suivante :

   $$y' + \frac{2x}{1 + x^2}y = 0$$

   et on pourra donc résoudre l'équation en donnant directement des solutions définies sur $\mathbb{R}$. Cette équation est de la forme $y' + \beta(x)y = 0$ avec $\beta(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$. Une primitive de β est la fonction $B(x) = \ln(1 + x^2)$. Donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme

   $$y_H(x) = Ce^{-\ln(1+x^2)} = \frac{C}{1 + x^2}$$

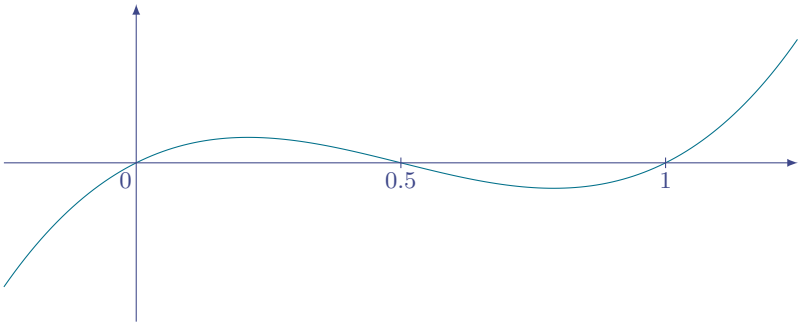
avec C un réel.
Comme il n'y a pas de second membre, l'ensemble des solutions sans prendre en compte la condition initiale est : $\mathcal{S}_2 = \left\{ x \mapsto \dfrac{C}{1+x^2} \ ; \ C \in \mathbb{R} \right\}$.
Condition initiale : $y(1) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{C}{2} = 2 \Leftrightarrow C = 4$.
Ainsi l'unique solution finale de l'équation est la fonction $x \mapsto \dfrac{4}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Équations différentielles non linéaires d'ordre 1

Exercice 48 (A préparer pour le TD5).
On s'intéresse au problème de Cauchy suivant

$$(P) \ : \ \begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{avec } f(x) = x\,(x-1)\,(x-0.5)\,.$$

1. Réaliser une représentation graphique de la fonction f.



2. Donner les points d'équilibre de l'équation $y' = f(y)$.

   x^* est un point d'équilibre de f si $f(x^*) = 0$. Or $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = 0.5$ donc l'équation admet 3 points d'équilibre : 0, 0.5 et 1.

3. On suppose que $y_0 \in]0; 0.5[$. On note y la solution maximale de (P) et T son intervalle de définition.
   (a) Justifier que pour tout $t \in T$, on a $y(t) \in]0; 0.5[$.

   Une solution ne pouvant pas traverser les états d'équilibre, s'il existe t tel que $y(t) \in]0; 0.5[$ alors pour tout $t \in T$, $y(t) \in]0; 0.5[$.

   (b) Que vaut T ?

   Pour tout $t \in T$, $y(t) \in]0; 0.5[$, c'est-à-dire $y(T) \subset]0; 0.5[$. Ainsi $y(T)$ est borné et donc $I = \mathbb{R}$.

   (c) Justifier que y est strictement croissante.

   Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) \in]0; 0.5[$ et pour tout $x \in]0; 0.5[$, $f(x) > 0$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y'(t) = f(y(t)) > 0$. Ainsi y est strictement croissante.

   (d) En déduire que y admet une limite finie.

   y est croissante et majorée (car bornée), donc elle admet une limite finie.

   (e) Que vaut sa limite en $+\infty$?

   Si une solution de l'équation admet une limite finie, alors sa limite est forcément un point d'équilibre. Ainsi les seules limites possibles de y sont 0, 0.5 et 1. Or $y_0 \in]0; 0.5[$ et y est croissante, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 0.5$.

4. On suppose maintenant que $y_0 \in]0.5; 1[$. On note y la solution maximale de (P) et T son intervalle de définition. En reprenant le même cheminement qu'à la question précédente, justifier que y est définie sur $\mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 0.5$.

   Une solution ne peut pas traverser les états d'équilibre et $y_0 \in]0.5; 1[$ donc pour tout $t \in T$, $y(t) \in]0.5; 1[$.

On a donc $y(T) \subset]0.5;1[$. Ainsi $y(T)$ est borné et $T = \mathbb{R}$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) \in]0.5;1[$ et pour tout $x \in]0.5;1[$, $f(x) < 0$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y'(t) = f(y(t)) < 0$.
Ainsi y est strictement décroissante.
y est décroissante et minorée (car bornée), donc elle admet une limite finie.
De plus si une solution de l'équation admet une limite finie, alors sa limite est forcément un point d'équilibre. Ainsi les seules limites possibles de y sont 0, 0.5 et 1. Or $y_0 \in]0.5;1[$ et f est décroissante, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0.5$.

5. On suppose que $y_0 > 1$. On note y la solution maximale de (P) et T son intervalle de définition.

   (a) Justifier que pour tout $t \in T$, on a $y(t) > 1$.

   Une solution ne pouvant pas traverser les états d'équilibre, s'il existe t tel que $y(t) > 1$ alors pour tout $t \in T$, $y(t) > 1$.

   (b) En déduire le sens de variation de y.

   Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) > 1$ et pour tout $x > 1$, $f(x) > 0$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y'(t) = f(y(t)) > 0$.
   Ainsi y est strictement croissante.

   (c) y admet-elle une limite finie ? Commenter.

   $y_0 > 1$ et y est croissante, donc si y admet une limite finie, sa limite est forcément strictement supérieure à 1. Or les seules limites possibles sont les points d'équilibre 0, 0.5 et 1. Donc y n'admet pas une limite finie.
   Cependant y est strictement croissante donc elle tend vers $+\infty$.

6. Résumer les différentes situations en fonction de la valeur y_0.

- si $y_0 = 0$, alors $T = \mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = 0$.
- si $y_0 \in]0;1[$, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0.5$.
- si $y_0 = 1$, alors $T = \mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = 1$.
- si $y_0 > 1$, alors y tend vers $+\infty$ en temps fini ou infini.

Exercice 49.
On s'intéresse au problème de Cauchy suivant

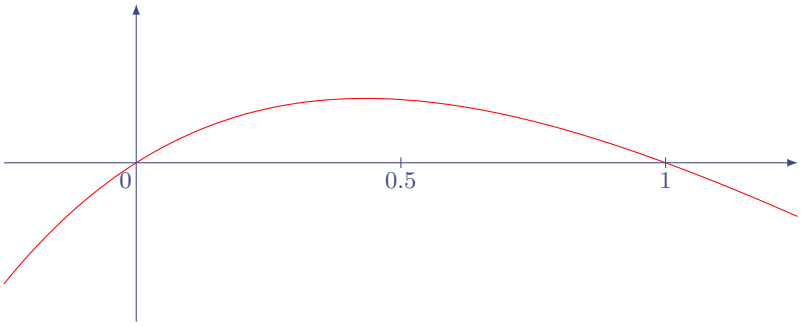
$$(P) \ : \ \begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{avec } f(x) = x\left(e^{-x} - \frac{1}{e}\right).$$

1. Donner les points d'équilibre de l'équation $y' = f(y)$. On les note a et b avec $a < b$.

   x^* est un point d'équilibre de f si $f(x^*) = 0$. Or $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $e^{-x} - \frac{1}{e} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$ donc l'équation admet 2 points d'équilibre : $a = 0$ et $b = 1$.

2. Réaliser une représentation graphique de la fonction f. Seules les intersections entre la courbe et l'axe des abscisses, ainsi que la position de la courbe avec l'axe des abscisse doivent être précis.

   On connait déjà les valeurs en lesquelles s'annule f. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Par conte ça ne garantit pas que f change de signe là où elle s'annule ; on peut par contre juste regarder le signe de f en $\frac{1}{2}$ par exemple : $f\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 0.12 > 0$.



3. Décrire, à l'aide du graphique précédent, les différents comportements des solutions de (P) en fonction de la valeur y_0, sans justification.

   - Si $y_0 < 0$, alors y décroît vers $-\infty$ en temps fini ou infini.
   - Si $y_0 = 0$, alors y est constante égale à 0.
   - Si $0 < y_0 < 1$, alors y croît vers 1.
   - Si $y_0 = 1$, alors y est constante égale à 1.
   - Si $y_0 > 1$, alors y décroît vers 1 en $+\infty$.

4. On suppose que $y_0 \in]0; b[$. On note y la solution maximale de (P) et T son intervalle de définition.

   (a) Justifier que pour tout $t \in T$, on a $y(t) \in]0; b[$.

   Une solution ne pouvant pas traverser les états d'équilibre, s'il existe t tel que $y(t) \in]0; 1[$ alors pour tout $t \in T$, $y(t) \in]0; 1[$.

   (b) Justifier le fait que $T = \mathbb{R}$.

   Pour tout $t \in T$, $y(t) \in]0; 1[$, c'est-à-dire $y(T) \subset]0; 1[$. Ainsi $y(T)$ est borné et donc $T = \mathbb{R}$.

   (c) Donner le sens de monotonie de y et le justifier.

   Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) \in]0; 1[$ et pour tout $x \in]0; 1[$, $f(x) > 0$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y'(t) = f(y(t)) > 0$. Ainsi y est strictement croissante.

   (d) Justifier pourquoi y admet une limite finie en $+\infty$ et pourquoi celle-ci vaut 1.

   y est croissante et majorée (car bornée), donc elle admet une limite finie.
   Si une solution de l'équation admet une limite finie, alors sa limite est forcément un point d'équilibre.
   Ainsi les seules limites possibles de y sont 0 et 1. Or $y_0 \in]0; 1[$ et y est croissante, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 1$.

Exercice 50.
Soit a un réel. On s'intéresse au problème de Cauchy suivant

$$(P) \ : \ \begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases} \quad \text{avec } f(x) = -x(x-a).$$

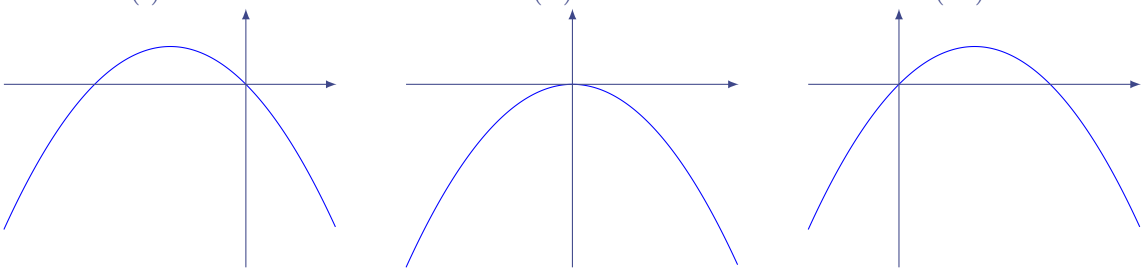
Il existe différentes situations selon la valeur du paramètre a.

1. Déterminer les points d'équilibre selon la valeur de a.

   $f(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = a$
   Donc si $a = 0$, il y a un unique point d'équilibre qui est 0. Par contre si $a \neq 0$, il y a deux points d'équilibre : 0 et a.

2. Représenter graphiquement les 3 situations.

   Il y a 3 situations car selon le signe de a les points d'équilibre ne se positionnent pas pareils.
   Situation (i) $a<0$. Situation (ii) $a=0$. Situation (iii) $a>0$.



3. Dans quelle(s) situation(s) y aura-t-il *convergence* vers un état d'équilibre non nul ?

   Il y aura donc *convergence* vers un état d'équilibre non nul quand $a>0$ et $y_0>0$.

4. Dans chacune des 3 situations, détailler le comportement des solutions.

   - Situation (i) $a<0$.
     - Si $y_0<a$, la solution maximale va décroître vers $-\infty$ en bordure supérieure de l'intervalle maximal.
     - Si $y_0=a$, la solution maximale est constante égale à a et définie sur $\mathbb{R}_+$.
     - Si $a<y_0<0$, la solution maximale va croître vers 0 en $+\infty$.
     - Si $y_0=0$, la solution maximale est constante égale à 0 et définie sur $\mathbb{R}_+$.
     - Si $0<y_0<a$, la solution maximale va décroître vers 0 en $+\infty$.
   - Situation (i) $a=0$.
     - Si $y_0<0$, la solution maximale va décroître vers $-\infty$ en bordure supérieure de l'intervalle maximal.
     - Si $y_0=0$, la solution maximale est constante égale à 0 et définie sur $\mathbb{R}_+$.
     - Si $0<y_0$, la solution maximale va décroître vers 0 en $+\infty$.
   - Situation (i) $a>0$.
     - Si $y_0<0$, la solution maximale va décroître vers $-\infty$ en bordure supérieure de l'intervalle maximal.
     - Si $y_0=0$, la solution maximale est constante égale à a et définie sur $\mathbb{R}_+$.
     - Si $0<y_0<a$, la solution maximale va croître vers a en $+\infty$.
     - Si $y_0=a$, la solution maximale est constante égale à 0 et définie sur $\mathbb{R}_+$.
     - Si $0<y_0<a$, la solution maximale va décroître vers a en $+\infty$.

5. Dans le cas où $a=0$, détailler toutes les justifications du comportement de la solution maximale.

Exercice 51.
Soit a un réel. On s'intéresse au problème de Cauchy suivant

$$(P)\ :\ \begin{cases} y'=f(y) \\ y(0)=y_0>0 \end{cases} \quad \text{avec } f(x)=x\,(x-1)\,(x-2)-\alpha x.$$

Il existe différentes situations selon la valeur du paramètre α :

$$(i)\ \alpha<-\frac{1}{4}\quad ;\quad (ii)\ \alpha=-\frac{1}{4}\quad ;\quad (iii)\ -\frac{1}{4}<\alpha<2\quad ;\quad (iv)\ \alpha=2\quad ;\quad (v)\ \alpha\geqslant 2.$$

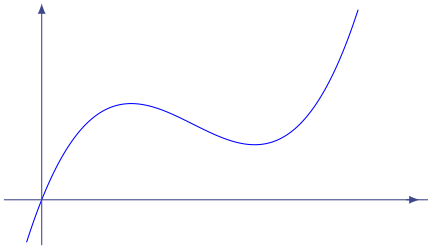
1. Calculer les points d'équilibre de l'équation $y'=f(y)$, en fonction de α.

   x^* est un point d'équilibre de f si $f(x^*)=0$. Or $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-3x^2+(2-\alpha)x=0 \Leftrightarrow x(x^2-3x+(2-\alpha))=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x^2-3x+(2-\alpha)=0$
   Étude de l'équation $x^2-3x+(2-\alpha)=0$: $\Delta=9-4\times(2-\alpha)=1+4\alpha$

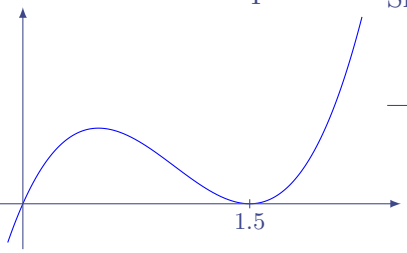
- si $\alpha < -\frac{1}{4}$, $\Delta < 0$. Il y a un unique point d'équilibre : 0.
- si $\alpha = -\frac{1}{4}$, $\Delta = 0$. Il y a deux points d'équilibre : 0 et 1.5.
- si $\alpha > -\frac{1}{4}$, $\Delta > 0$. Les points d'équilibre sont : 0, $\frac{3-\sqrt{4\alpha+1}}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{4\alpha+1}}{2}$:
  - si $\alpha = 2$, $\frac{3-\sqrt{4\alpha+1}}{2} = 0$, il n'y a donc que 2 points d'équilibre : 0 et $\frac{3+\sqrt{4\alpha+1}}{2} = 3$.
  - si $\alpha < 2$, $\frac{3-\sqrt{4\alpha+1}}{2} > 0$, il y a 3 points d'équilibre : $0 < \frac{3-\sqrt{4\alpha+1}}{2} < \frac{3+\sqrt{4\alpha+1}}{2}$.
  - si $\alpha > 2$, $\frac{3-\sqrt{4\alpha+1}}{2} > 0$, il y a 3 points d'équilibre : $\frac{3-\sqrt{4\alpha+1}}{2} < 0 < \frac{3+\sqrt{4\alpha+1}}{2}$.

2. Esquisser, pour chaque situation, le diagramme de phase correspondant.

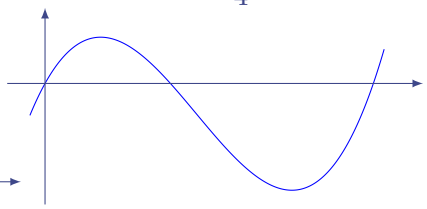
Situation (i) $\alpha < -\frac{1}{4}$.



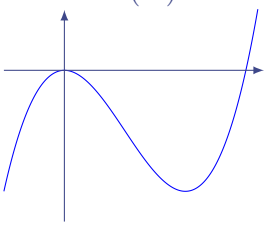
Situation (ii) $\alpha = -\frac{1}{4}$.



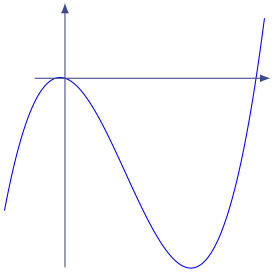
Situation (iii) $-\frac{1}{4} < \alpha < 2$.



Situation (iv) $\alpha = 2$.



Situation (v) $\alpha \geqslant 2$.



3. Dans quelle(s) situation(s) y aura-t-il *convergence* vers un état d'équilibre non nul ? Et préciser la valeur de cet état d'équilibre.

   Dans le cas où $\alpha = -\frac{1}{4}$, si $y_0 \in]0; 1.5]$, la solution maximale tendra vers 1.5 en $+\infty$.

   Dans le cas où $-\frac{1}{4} < \alpha < 2$, si $y_0 \in \left]0; \frac{3+\sqrt{4\alpha+1}}{2}\right[$, la solution maximale tendra vers $\frac{3-\sqrt{4\alpha+1}}{2}$ en $+\infty$.

4. Dans quelle(s) situation(s), la solution maximale tend vers 0 en $+\infty$?

   Dans le cas où $\alpha \geqslant 2$ et $y_0 \in \left]0; \frac{3+\sqrt{4\alpha+1}}{2}\right[$, la solution maximale tendra vers 0 en $+\infty$.

5. Dans quelle(s) situation(s), la solution maximale admettra une limite infinie en $+\infty$ ou en temps fini ?

   - dans le cas où $\alpha < -\frac{1}{4}$ et $y_0 > 0$;
   - quand $\alpha \geqslant -\frac{1}{4}$ et $y_0 > \frac{3+\sqrt{4\alpha+1}}{2}$.

Equations différentielles en dimension p

Exercice 52 (A préparer pour le TD6).
On s'interesse à une population de bactérie se déplacant aléatoirement entre deux compartiment. On note $Y = (y_1, y_2)^T$ la concentration (unité : u.c.) de bactérie dans chaque compartiment. On note également u.t. l'unité de temps. Les bactéries meurent à un taux fixé à $m = 1$ (en $(u.t.)^{-1}$.
Enfin, dans le premier compartiment, un tuyau ensemence régulirement le milieu avec une quantité de 1 $u.c.$ par $u.t.$
Enfin la vitesse de déplacement est définie par $d > 0$ esprimé en $(u.t.)^{-1}$.
Soit $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $E = (1, 0)^T$. La situation est modélisée par l'équation différentielle en dimension 2 :

$$Y' = dMY - Y + E.$$

1. Interpréter les termes.
2. Réécrire l'équation sous la forme
$$Y' = AY + E$$
où A dépend du parametre d. et résoudre cette équation.
3. Quelle est le comportement en temps long de la population ?

1. **1. Interprétation**
   - $Y = (y_1, y_2)^T$: concentrations bactériennes dans les deux compartiments.
   - dMY : échanges aléatoires entre compartiments, proportionnels à la vitesse d.
   - $-Y$: mortalité bactérienne au taux $m = 1$.
   - E : apport constant de 1 u.c./u.t. dans le compartiment 1.
2. **2. Mise sous forme $Y' = AY + E$** On écrit
$$Y' = (dM - I_2)Y + E,$$
avec
$$A = dM - I_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -d-2 & d \\ d & -d-2 \end{pmatrix}.$$
Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -d - 1$. 0 n'étant pas valeur propre de A on peut trouver une solution particulière constante $Y^{\mathfrak{p}} = -A^{-1}E$
et la solution est de la forme
$$Y(t) = e^{tA}(Y(0) - Y^{\mathfrak{p}}) + Y^{\mathfrak{p}}.$$
Pour le calcul explicite il faut calculer explicitement e^{tA} et $Y^{\mathfrak{p}}$.
Comme dit précédemment,
$$Y^{\mathfrak{p}} = -A^{-1}E$$
soit
$$Y^{\mathfrak{p}} = \frac{1}{2(d+1)}\begin{pmatrix} d+2 \\ d \end{pmatrix}.$$

Le calcul de e^{tA} est plus délicat. (En fait, si le but est la question 3, les valeurs propres de A étant toutes strictrement négatives, $e^{tA} \to \mathbf{0}$ et le calcul explicite n'est pas nécessaire.)
On doit dabord diagonaliser A.
Un vecteur propre associé à $\lambda_1 = -1$ est $V_1 = (1,1)^T$.
Un vecteur propre associé à $\lambda_2 = -d-1$ est $V_2 = (1,-1)^T$. Notons alors la matrice de changement de base $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ il vient

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -(d+1) \end{pmatrix} P^{-1}.$$

et donc

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t(d+1)} \end{pmatrix} P^{-1}$$

On vérifie facilement que

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$e^{tA} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} + e^{-t(d+1)} & e^{-t} - e^{-t(d+1)} \\ e^{-t} - e^{-t(d+1)} & e^{-t} + e^{-t(d+1)} \end{pmatrix}.$$

On en conclu que

$$Y(t) = e^{-t}\left(\frac{1}{2}(y_1(0)+y_2(0)) - 1\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}e^{-t(d+1)}\left(y_1(0) - y_2(0) - \frac{1}{d+1}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2(d+1)}\begin{pmatrix} d+2 \\ d \end{pmatrix}$$

3. **3. Comportement en temps long** Les valeurs propres de A sont

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = -d-1,$$

toutes deux strictement négatives pour $d > 0$. Ainsi $e^{At} \to 0$ quand $t \to \infty$.
Et l'équilibre stationnaire est

$$Y^{\mathfrak{p}} = -A^{-1}E.$$

Ainsi, à la limite,

$$y_1 = \frac{d+2}{2(d+1)}, \qquad y_2 = \frac{d}{2(d+1)}.$$

La population totale tend vers

$$y_1(\infty) + y_2(\infty) = 1,$$

répartie entre les compartiments selon le ratio $2(d+1) : d$.

Exercice 53.
Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle

$$Y' = AY + B$$

muni de la condition initiale $Y(0) = (1,0)^T$ avec $B = (1,2)^T$ et $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de A est

$$P_A(X) = X^2 - X - 6.$$

On trouve deux racines $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = 3$. Les vecteurs propres associés sont respectueusement $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ A est diagonalisable car est de taille deux et admet deux valeurs propres distinctes. A est inversible car 0 n'est pas valeur propre.
On trouve une solution particulière sous la forme du vecteur constant

$$Y^{\mathfrak{p}} = -A^{-1}B.$$

Un calcul explicite montre que

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

d'où

$$Y^{\mathfrak{p}} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Les solutions de l'équation homogène sont

$$Y^{\mathfrak{h}}(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} V_2$$

soit

$$Y^{\mathfrak{h}}(t) = \alpha_1 e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.
On en déduit la solution générale de l'équation différentielle

$$Y(t) = Y^{\mathfrak{h}}(t) + Y^{\mathfrak{p}} = \alpha_1 e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

où $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.
On détermine maintenant $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ ç l'aide de la condition initiale.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

soit le système linéaire

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - \dfrac{7}{6} = 1 \\ \alpha_1 - \dfrac{4}{6} = 0 \end{cases}$$

qui admet l'unique solution $(\alpha_1, \alpha_2) = (\frac{2}{3}, \frac{3}{2})$ d'où l'unique solution

$$Y(t) = \frac{2}{3}e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

que l'on peut réécrire

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3}e^{-2t} + \dfrac{3}{2}e^{3t} - \dfrac{7}{6} \\ \dfrac{2}{3}e^{-2t} - \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Exercice 54.
On modélise un marché par deux variables :

$$p(t) \quad \text{(prix)}, \qquad q(t) \quad \text{(quantité échangée)}.$$

Le mécanisme d'ajustement dynamique est donné par le système linéaire d'ordre 1 :

$$\begin{cases} p'(t) = -2\,p(t) + q(t) + 4, \\ q'(t) = \quad p(t) - 4\,q(t) + 10. \end{cases}$$

1. Écrire le système sous forme matricielle $Y'(t) = AY(t) + B$.
2. Déterminer l'équilibre de marché (p^*, q^*) en résolvant le système stationnaire $\begin{cases} 0 = -2p + q + 4, \\ 0 = p - 4q + 10. \end{cases}$
3. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ et vérifier que A est diagonalisable.
4. Résoudre l'équation homogène.
5. En déduire la forme générale de la solution $Y(t)$
6. Avec les conditions initiales
$$p(0) = 2, \qquad q(0) = 5,$$
déterminer la solution explicite $(p(t), q(t))$.
7. Interpréter économiquement le résultat.

1. Forme matricielle. On pose

$$Y(t) = \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Le système s'écrit bien

$$Y'(t) = AY(t) + B.$$

2. Équilibre. L'équilibre $Y^* = (p^*, q^*)$ vérifie $AY^* + B = 0$. On résout :

$$\begin{cases} -2p^* + q^* + 4 = 0, \\ p^* - 4q^* + 10 = 0, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad (p^*, q^*) = \left(\frac{26}{7}, \frac{24}{7}\right).$$

3. Valeurs propres et vecteurs propres. On calcule

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 6\lambda + 7.$$

Les valeurs propres sont

$$\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{2},$$

réelles et négatives. Un vecteur propre associé à λ est

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 + \lambda \end{pmatrix}.$$

Les deux valeurs propres sont distinctes donc A est diagonalisable.

4. Résolution de l'équation homogène. La solution générale de $Y' = AY$ est

$$Y^{\natural}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2.$$

5. Solution générale du système complet.

$$Y(t) = Y^* + c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2.$$

6. Conditions initiales.
On résout

$$Y(0) = c_1 V_1 + c_2 V_2 + Y^*,$$

ce qui détermine c_1 et c_2 (système linéaire 2×2). La solution explicite $(p(t), q(t))$ s'obtient en remplaçant ces constantes dans la formule précédente.

7. Interprétation économique. Les deux valeurs propres sont réelles et négatives.
Le prix et la quantité convergent vers

$$(p^*, q^*) = \left(\frac{26}{7}, \frac{24}{7}\right).$$

Les valeurs propres mesurent la vitesse d'ajustement du marché le long des directions propres.

Exercice 55.
On modélise la concentration $x(t)$ d'un médicament dans le sang. Le médicament est injecté par perfusion à débit constant $Q = 5(mg.h^{-1})$. L'organisme élimine le médicament proportionnellement à la concentration, et la distribution dans le corps présente une inertie. On obtient l'équation différentielle :

$$x''(t) + 4\,x'(t) + 3\,x(t) = 5.$$

de plus $x(0) = x'(0) = 0$.
Calculer $x(t)$ et en déduire la valeur limite de la concentration du médicament.

Mise sous forme vectorielle. On pose $Y(t) = (x(t), x'(t))^T$. On a

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ 5 - 3x(t) - 4x'(t) \end{pmatrix}.$$

Soit

$$Y'(t) = AY(t) + B$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Etude (spectrale) de A. Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = -1$. A est donc inversibles (0 n'est pas valeur propre) et diagonalisable (A est de taille 2 et admet deux valeurs propres distinctes).
Soit $V_1 = (x, y)^T$ un vecteur propre associé à λ_1. On a $AV_1 = \lambda_1 V_1$ soit le système (linéaire homogène de rang 1)

$$\begin{cases} y = -3x \\ -3x - 4y = -3y \end{cases}$$

On en déduit $y = -3x$ d'où $V_1 = x \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. On peut prendre par exemple $x = 1$ et on obtient

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

. De même d'apres $AV_2 = \lambda_2 V_2$, on trouve par exemple

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Solution particulière. Comme B est constant et A est inversible on a une solution particulière constante

$$Y^{\mathfrak{p}} = -A^{-1}B$$

Un calcul direct donne

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où la solution particulière

$$Y^{\mathfrak{p}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Equation homogène.L'équation homogène s'écrit $Y' = AY$. Comme A est diagonalisable les solutions générales de cette équation homogène sont

$$Y^{\mathfrak{h}}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2$$

avec $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$.
Explicitement :

$$Y^{\mathfrak{h}}(t) = c_1 e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

avec $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$.
Solutions générales. Les solutions s'écrivent donc $Y(t) = Y^{\mathfrak{h}}(t) + Y^{\mathfrak{p}}$. Soit explicitement

$$Y(t) = c_1 e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$.
En particulier

$$x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-t} + \frac{5}{3}.$$

Unique solution à l'aide de la condition initiale
On a $Y(0) = (0, 0)^T$ d'où le système

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \frac{5}{3} = 0 \\ -3c_1 - c_2 = 0 \end{cases}$$

L'unique solution est $(c_1, c_2) = \left(\frac{5}{6}, -\frac{5}{2}\right)$. D'où en remplacant directement dans l'expression de $x(t)$:

$$x(t) = \frac{5}{6}e{-3t} - \frac{5}{2}e^{-t} + \frac{5}{3}.$$

Enfin, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \frac{5}{3}$.

Exercice 56.
On considère un système mécanique constitué d'une masse m attachée à un ressort de raideur k et à un dispositif d'amortissement visqueux de coefficient c. Une force extérieure constante F_0 agit sur la masse. La position de la masse à l'instant t est notée $x(t)$. Le mouvement est régi par l'équation différentielle :

$$m\,x''(t) + c\,x'(t) + k\,x(t) = F_0.$$

On suppose que les paramètres vérifient : $c^2 > 4mk$
Calculer $x(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. sachant que $x(0) = x'(0) = 0$ (on n'explicitera pas les vecteurs propres). Que se passe-t-il lorsque $t \to +\infty$?

On divise tout par m et on pose $Y = (x, x')^T$. On obtient

$$Y' = AY + B$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{c}{m} \end{pmatrix}.$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m}F_0 \end{pmatrix}.$$

Le polynome caractéristique de A est

$$P_A(X) = X^2 + \frac{c}{m}X + \frac{k}{m}.$$

Le discriminant est $\Delta = \dfrac{c^2}{m^2} - 4\dfrac{k}{m} = \dfrac{c^2 - 4km}{m^2}$.
D'apres l'hypothèse de l'énoncé, $\Delta > 0$. A admet donc deux racines reeles distinctes

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{c}{m} - \sqrt{\Delta}\right).$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{c}{m} + \sqrt{\Delta}\right).$$

Remarquons que les deux valeurs propres sont strictement négatives.
On trouve que une solution particulière

$$Y^{\mathfrak{p}} = \begin{pmatrix} F_0/k \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'où les solutions générales

$$Y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2 + \begin{pmatrix} F_0/k \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres étant négatives, on a

$$Y(t) \to \begin{pmatrix} F_0/k \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$x(t) \to F_0/k$$

La position du pendule se stabilise en F_0/k.

Exercice 57 (Système linéaire en dimension 3 issu de la biologie, avec terme source).
On modélise l'évolution de trois populations cellulaires dans un tissu biologique :
- $x(t)$: cellules saines, - $y(t)$: cellules infectées, - $z(t)$: cellules immunitaires activées.
On suppose que, dans un régime linéaire, leur dynamique est donnée par

$$\begin{cases} x'(t) = -0.2\,x(t) + 0.1\,y(t) + 5, \\ y'(t) = 0.3\,x(t) - 0.5\,y(t) + 0.2\,z(t) + 1, \\ z'(t) = 0.1\,y(t) - 0.4\,z(t) + 2, \end{cases} \qquad (x(0), y(0), z(0)) = (10, 2, 0).$$

1. Écrire ce système sous forme matricielle
$$X'(t) = AX(t) + B, \qquad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$
2. Déterminer explicitement la matrice A et le vecteur B.
3. Considérer d'abord le système homogène $X'(t) = AX(t)$. Calculer le polynôme caractéristique de A et montrer qu'il admet trois valeurs propres réelles négatives :
$$\lambda_1 = -0.1, \qquad \lambda_2 = -0.4, \qquad \lambda_3 = -0.7.$$
4. En déduire la forme générale de la solution du système homogène :
$$X_h(t) = C_1 e^{-0.1t} v_1 + C_2 e^{-0.4t} v_2 + C_3 e^{-0.7t} v_3.$$
5. Chercher une solution particulière constante X_p du système complet, et la déterminer explicitement.
6. En déduire la solution générale du système complet, puis déterminer les constantes C_1, C_2, C_3 à partir des conditions initiales.
7. Étudier le comportement asymptotique de $X(t)$ lorsque $t \to +\infty$.
8. Donner une interprétation biologique concise : rôle des interactions, effet du terme source, existence d'un état stationnaire non nul.

Corrigé.

1. On pose
$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$
Le système s'écrit
$$X'(t) = AX(t) + B.$$
2. On lit directement :
$$A = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.3 & -0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & -0.4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
3. Le polynôme caractéristique est
$$P(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = (\lambda + 0.1)(\lambda + 0.4)(\lambda + 0.7).$$
Les valeurs propres sont donc
$$\lambda_1 = -0.1, \qquad \lambda_2 = -0.4, \qquad \lambda_3 = -0.7.$$

4. La solution homogène est
$$X_h(t) = C_1 e^{-0.1t} v_1 + C_2 e^{-0.4t} v_2 + C_3 e^{-0.7t} v_3.$$
5. On cherche une solution particulière constante X_p. On impose
$$0 = AX_p + B \quad \Longrightarrow \quad X_p = -A^{-1}B.$$
Un calcul direct donne
$$X_p = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}.$$
6. La solution générale est
$$X(t) = X^{\mathfrak{h}}(t) + X^{\mathfrak{p}}.$$
On détermine C_1, C_2, C_3 en résolvant
$$X(0) = C_1 v_1 + C_2 v_2 + C_3 v_3 + X_p = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Comme les vecteurs propres forment une base, le système linéaire admet une solution unique.
7. Comme toutes les valeurs propres sont négatives,
$$e^{-0.1t},\ e^{-0.4t},\ e^{-0.7t} \to 0.$$
Donc
$$X(t) \longrightarrow X_p = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}.$$
8. **Interprétation biologique concise.**
- Les termes diagonaux négatifs modélisent la mortalité naturelle ou la dégradation des cellules. - Les termes hors diagonale représentent les interactions biologiques : - $0.3x$ alimente les cellules infectées, - $0.1y$ active les cellules immunitaires, - $0.2z$ renforce la réponse immunitaire. - Le vecteur source $B = (5, 1, 2)$ représente des apports constants : - renouvellement de cellules saines, - arrivée continue de cellules infectées, - activation basale du système immunitaire. - Les valeurs propres négatives garantissent la stabilité : sans source, tout s'éteindrait. - Grâce au terme source, le système converge vers un *état stationnaire non nul* :
$$(x^*, y^*, z^*) = (20, 10, 5).$$
Biologiquement : les populations se stabilisent à des niveaux constants, reflétant un équilibre dynamique entre renouvellement, infection et réponse immunitaire.

Exercice 58 (Ordre 2 et interprétation économique).
On considère un marché concurrentiel pour un bien homogène. On note : - $p(t)$ le prix du bien au temps t, - p^* le prix d'équilibre de long terme (celui qui égalise offre et demande à long terme).
Les ajustements de prix sont lents et soumis à des frictions (coûts d'ajustement, rigidités), et la demande subit un choc permanent (politique publique, changement de préférences), modélisé par un terme source constant.
On admet que la dynamique de p vérifie l'équation différentielle
$$p''(t) + 3\,p'(t) + 2\,p(t) = 10,$$
avec les conditions initiales
$$p(0) = 4, \qquad p'(0) = 0.$$

1. Vérifier qu'il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants avec terme source.
2. Considérer l'équation homogène associée
$$p''(t) + 3\,p'(t) + 2\,p(t) = 0.$$
   (a) Déterminer le polynôme caractéristique.
   (b) Calculer ses racines réelles.
   (c) En déduire l'expression générale des solutions de l'équation homogène.
3. Chercher une solution particulière de l'équation complète sous la forme constante
$$p^{\mathfrak{p}}(t) = C, \quad C \in \mathbb{R},$$
   et déterminer C.
4. En déduire la solution générale de l'équation complète, puis déterminer la solution vérifiant les conditions initiales.
5. Étudier le comportement de $p(t)$ lorsque $t \to +\infty$.
6. Donner une interprétation microéconomique concise : rôle des termes $3p'$, $2p$, du terme source 10, nature de l'ajustement vers l'équilibre (stabilité, oscillations ou non, dépendance aux conditions initiales).

Corrigé.

1. L'équation
$$p'' + 3p' + 2p = 10$$
   est linéaire (chaque terme est linéaire en p, p', p'') avec coefficients constants 3 et 2. L'ordre est 2 (dérivée maximale p''). Le membre de droite 10 est un terme source constant.
2. Équation homogène :
$$p'' + 3p' + 2p = 0.$$
   (a) On pose $p(t) = e^{\lambda t}$. Le polynôme caractéristique est
$$P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2.$$
   (b) On factorise :
$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2).$$
   Les racines sont
$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = -2.$$
   (c) La solution générale de l'équation homogène est
$$p_h(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t},$$
   où $A, B \in \mathbb{R}$.
3. On cherche une solution particulière constante $p_p(t) = C$. Alors
$$p_p' = 0, \qquad p_p'' = 0.$$
   En remplaçant dans l'équation complète :
$$0 + 0 + 2C = 10 \quad \Longrightarrow \quad 2C = 10 \quad \Longrightarrow \quad C = 5.$$
   Donc
$$p_p(t) = 5.$$

4. La solution générale de l'équation complète est

$$p(t) = p_h(t) + p_p(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t} + 5.$$

On utilise les conditions initiales.
Pour $t = 0$:

$$p(0) = 4 \quad \Longrightarrow \quad A + B + 5 = 4 \quad \Longrightarrow \quad A + B = -1.$$

On calcule

$$p'(t) = -Ae^{-t} - 2Be^{-2t}.$$

Pour $t = 0$:

$$p'(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad -A - 2B = 0.$$

On résout

$$\begin{cases} A + B = -1, \\ -A - 2B = 0. \end{cases}$$

La seconde équation donne $A = -2B$. En remplaçant dans la première :

$$-2B + B = -1 \quad \Longrightarrow \quad -B = -1 \quad \Longrightarrow \quad B = 1,$$

puis $A = -2$.
Ainsi,

$$p(t) = -2e^{-t} + e^{-2t} + 5.$$

5. Lorsque $t \to +\infty$, on a

$$e^{-t} \to 0, \qquad e^{-2t} \to 0,$$

donc

$$p(t) \to 5.$$

6. **Interprétation microéconomique concise.**
- $p(t)$ est le *prix de marché* au cours du temps. - Le terme $2p$ joue le rôle d'une *force de rappel* vers un niveau d'équilibre : l'écart de prix génère des ajustements d'offre et de demande qui ramènent le prix vers une valeur cible. - Le terme $3p'$ modélise des *frictions d'ajustement* (coûts de modification de prix, rigidités, délais d'information) : il amortit les variations trop rapides de prix. - Le terme source constant 10 représente une *pression permanente de demande ou de soutien public* (par exemple une demande publique soutenue).

Ici, toutes les racines sont réelles, négatives, et il n'y a pas de termes sinusoïdaux : pas d'oscillations. Le prix converge monotone vers un nouvel équilibre stable $p^* = 5$, *indépendant des conditions initiales* : la politique (ou la demande exogène) fixe un niveau d'équilibre de long terme, et la dynamique d'ajustement est amortie et stable.

Exercice 59 (Ordre 2 avec terme source et interprétation mécanique).
On considère un système masse–ressort soumis à une force extérieure. La position de la masse par rapport à sa position d'équilibre est notée $y(t)$. Le mouvement est modélisé par l'équation différentielle :

$$y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 10\cos(2t),$$

avec les conditions initiales

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0.$$

1. Vérifier qu'il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de l'équation homogène associée et ses racines.
3. En déduire la solution générale de l'équation homogène.

4. Chercher une solution particulière sous la forme
$$y_p(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t),$$
et déterminer les constantes A et B.
5. En déduire la solution générale de l'équation complète, puis déterminer la solution vérifiant les conditions initiales.
6. Étudier le comportement asymptotique de $y(t)$ lorsque $t \to +\infty$.
7. Donner une interprétation mécanique concise : rôle de l'amortissement, de la force extérieure, et nature du régime final.

1. L'équation
$$y'' + 4y' + 5y = 10\cos(2t)$$
est linéaire (chaque terme est linéaire en y, y', y'') et les coefficients 4 et 5 sont constants. L'ordre est 2 car la dérivée la plus élevée est y''.
2. On cherche une solution de la forme $y = e^{\lambda t}$. Le polynôme caractéristique est
$$P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5.$$
3. Le discriminant vaut
$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 5 = 16 - 20 = -4.$$
Les racines sont
$$\lambda_{1,2} = -2 \pm i.$$
La solution homogène est donc
$$y_h(t) = e^{-2t}(C_1\cos t + C_2\sin t).$$
4. On cherche une solution particulière sous la forme
$$y_p(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t).$$
On calcule :
$$y_p' = -2A\sin(2t) + 2B\cos(2t),$$
$$y_p'' = -4A\cos(2t) - 4B\sin(2t).$$
On substitue dans l'équation :
$$(-4A\cos 2t - 4B\sin 2t) + 4(-2A\sin 2t + 2B\cos 2t) + 5(A\cos 2t + B\sin 2t) = 10\cos 2t.$$
Coefficient de $\cos(2t)$:
$$-4A + 8B + 5A = A + 8B = 10.$$
Coefficient de $\sin(2t)$:
$$-4B - 8A + 5B = B - 8A = 0.$$
On résout :
$$\begin{cases} A + 8B = 10, \\ B = 8A. \end{cases}$$
Donc
$$A + 64A = 10 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{10}{65} = \frac{2}{13},$$
$$B = 8A = \frac{16}{13}.$$
Ainsi
$$y_p(t) = \frac{2}{13}\cos(2t) + \frac{16}{13}\sin(2t).$$

5. La solution générale est

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = e^{-2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + \frac{2}{13}\cos(2t) + \frac{16}{13}\sin(2t).$$

Conditions initiales :

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_1 + \frac{2}{13} = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{2}{13}.$$

$$y'(t) = e^{-2t}\big[-2(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + (-C_1 \sin t + C_2 \cos t)\big] + \frac{d}{dt}y_p(t).$$

À $t = 0$:

$$y'(0) = -2C_1 + C_2 + \frac{d}{dt}y_p(0) = 0.$$

Or

$$y_p'(0) = 2B = \frac{32}{13}.$$

Donc

$$-2C_1 + C_2 + \frac{32}{13} = 0.$$

Avec $C_1 = -\frac{2}{13}$:

$$\frac{4}{13} + C_2 + \frac{32}{13} = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{36}{13}.$$

Solution finale :

$$y(t) = e^{-2t}\left(-\frac{2}{13}\cos t - \frac{36}{13}\sin t\right) + \frac{2}{13}\cos(2t) + \frac{16}{13}\sin(2t).$$

6. Comme $e^{-2t} \to 0$, on obtient

$$y(t) \sim \frac{2}{13}\cos(2t) + \frac{16}{13}\sin(2t), \qquad t \to +\infty.$$

Le système tend vers un régime permanent oscillant à fréquence 2.

7. **Interprétation mécanique concise.**

- Le terme $4y'$ représente un amortissement : il dissipe l'énergie. - Le terme $5y$ représente la raideur du ressort. - Le terme source $10\cos(2t)$ est une force extérieure périodique (vibration imposée).

Le système est amorti (racines à partie réelle négative), donc les oscillations libres disparaissent. Mais la force extérieure impose un régime forcé : à long terme, le mouvement est une oscillation stable à la fréquence de la force, indépendante des conditions initiales.

C'est le comportement classique d'un oscillateur amorti forcé.