L2 Économie — Année 2026/2027

Module 2 - Outils Quantitatifs
Mathématiques pour l'Économiste 4

Fascicule d'exercices

Sten Madec

université de TOURS | Faculté de droit, économie & sciences sociales

Table des matières

Thème 1 - Généralités sur les suites ; suite récurrentes linéaires d'ordre 1 **4**
Thème 2 - Suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ **9**
Thème 3 - Equations récurrentes en dimension p **12**
Thème 4 - Équations différentielles linéaires d'ordre 1 **16**
Thème 5 - Équations différentielles non linéaires d'ordre 1 **19**
Thème 6 - Equations différentielles en dimension p **21**

Organisation de l'enseignement

Chargé.es de cours et de travaux dirigés

Sten Madec :
- E-mail : sten.madec@univ-tours.fr
- Bureau B246 (bâtiment B)

Prérequis

Le bon suivi de ce cours nécessite de savoir : manipuler des expressions algébriques, résoudre des équations simples, savoir manipuler des paramètres. Il est également nécessaire de connaître les notions de bases sur les suites, en particulier les limites., d'avoir déjà fait des démonstrations par récurrence, ainsi que de savoir trouver des primitives de fonctions classiques.
Cela correspond principalement aux enseignements de précalculus, Calcul et Logique 1, Calcul et Logique 2 ainsi que Mathématiques pour l'économiste 1 et mathématiques pour l'économiste 3.

Plan de cours

- Suites numériques : – rappels, sous-suites extraites, limite monotone ;
- Suites récurrentes : – réelles d'ordre 1 linéaires quelconques,
  – réelles d'ordre 1 nonlinéaires autonomes,
  – vectorielle et d'ordre p linéaires autonomes ;
- Équations différentielles : – réelles d'ordre 1 linéaires quelconques,
  – réelles d'ordre 1 nonlinéaires autonomes,
  – vectorielle et d'ordre p linéaires autonomes ;

Approche pédagogique

L'enseignement se déroule sur 9 séances de cours magistraux de 2h, dont 2 réservées à des contrôles, et 6 séances de travaux dirigés de 2h.

Support pédagogique

Sur Celene, vous trouverez : le polycopié de cours, des fiches méthodes, le contenu projeté lors de cours magistraux, le fascicule d'exercices, des éléments de correction des exercices et des annales.

Modalités d'évaluation

Cet enseignement est entièrement en contrôle continu (cela signifie qu'il n'y a pas de session de rattrapage). L'évaluation principale se base sur deux contrôles écrits de 2h en amphi (comptant chacun pour 50%). Ainsi votre moyenne *initiale* à cet enseignement est calculée de la façon suivante :

$$\text{Moyenne_initiale} = 0.5 \times \text{CC1} + 0.5 \times \text{CC2}$$

À l'issue du semestre, une fois que votre note au CC2 ainsi que votre moyenne initiale vous sont communiquées, vous avez la possibilité de passer une épreuve supplémentaire nommée CC3. Cette épreuve supplémentaire aura lieu la semaine du 13 avril et sera un écrit ou un oral portant sur tout le programme de l'enseignement. Si vous passez cette épreuve, votre moyenne *initiale* sera remplacée par :

$$\text{Nouvelle_moyenne} = 0.5 \times \text{Moyenne_initiale} + 0.5 \times \text{CC3}$$

Pour être autorisé à passer le CC3, vous devrez obligatoirement vous inscrire via un questionnaire sur la page Celene du cours. Attention si vous décidez de passer l'épreuve de CC3, sa note sera obligatoirement prise en compte même si cela diminue votre moyenne initiale.
Cas particulier des RSE. Pour les étudiantes et étudiants RSE, seul le calcul de la moyenne initiale est différent car elle correspond uniquement à la note de CC2. Il y a également possibilité de passer le CC3 selon les mêmes règles.

Planning prévisionnel des cours et des évaluations

Semaine	CM - Thème	TD	
12/01	CM1 - C1-Suites		
19/01	CM2 - C2-SR LIN	TD1	
23/01	CM3 - C2-SR NON LIN	TD2	
02/02	CM4 - C2-SR VECT	TD3	
9/02			
16/02	**CC1** - C1 et C2		
23/02	Pause	Pause	
02/03	CM5 - C3-EDR LIN		
09/03	CM6 - C3-EDR NON LIN	TD4	
16/03	CM7 - C3-ED VEC	TD5	
23/03		TD6	
30/03	**CC2** - C3		
06/04			
13/04	**Seconde Chance CC3**		

Bibliographie

Il s'agit de lectures complémentaires au cours et travaux dirigés.

- *Mathématiques des modèles économiques*, Pascale Dameron, 510 DAM ;
- *Analyse pour l'économie et la gestion*, Olivier Ferrier, 510 FER ;
- *Mathématiques pour l'économie*, Guy-Patrick Mafouta-Bantsimba, 510 MAF ;
- *Mathématiques pour économistes*, Simon et Blume, 510 SIM, plus compliqué que les attentes du cours ;
- *Analyse pour économistes II*, Alain Piller, 515 PIL, il s'agit d'exercices corrigés sans paramètres ;
- *Mathématiques en économie-gestion*, Stéphane Rossignol, (tout le contenu du cours n'y est pas présent, on y trouve les bases des suites et les suites récurrentes linéaires d'ordre 1 ;
- *Mathématiques pour l'économistes en 27 fiches* et *Mathématiques pour l'économie Analyse-Algèbre*, Haïyek et Leca, (seulement la partie sur les suites).

Thème 1

Généralités sur les suites ; suite récurrentes linéaires d'ordre 1

Exercice 1 (À préparer pour le CM2).
Soient α, β et γ 3 réels strictement positifs.
On considère les 4 suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes généraux sont :

$$a_n = \frac{n-1}{n+1}\,; \quad b_n = 5^n - \alpha^n\,; \quad c_n = 1 + \frac{\beta - 1}{n} \quad d_n = \left(\frac{1+\gamma}{2}\right)^n.$$

1. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle minorée ? majorée ? bornée ?
2. Déterminer selon la valeur de α les cas où la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, les cas où elle est majorée, puis les cas où elle est bornée.
3. Déterminer, éventuellement selon le valeur de β, le sens de variation de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. Déterminer, éventuellement selon le valeur de γ, le sens de variation de $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2 (À préparer pour le TD1).
Soit a un réel quelconque.
On considère les 4 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes généraux sont :

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n\,; \quad v_n = \frac{n^2}{n!}\,; \quad w_n = (a-2)n \quad x_n = (n-10)^2.$$

Étudier les variations de ces 4 suites, éventuellement selon la valeur du paramètre a.

Exercice 3 (À préparer pour le TD1).
Déterminer la limite (éventuelle) des suites de terme général :

1. $n(-1)^n$;
2. $\dfrac{(-1)^n}{n}$;
3. $3 \times (-2)^n$;
4. $\dfrac{\cos(n)}{n}$;
5. $n^{\frac{1}{\ln(n)}}$.

Exercice 4.
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \dfrac{(-a)^n + 1}{1 + a^{n+1}}$.

1. On s'intéresse à la sous-suite extraite des indices de rang pair : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_n = u_{2n}$, pour tout entier naturel n.
   (a) Exprimer le terme général de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Déterminer, en fonction de a, si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite et si oui, déterminer sa limite.
2. On s'intéresse à la sous-suite extraite des indices de rang impair : $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $w_n = u_{2n+1}$, pour tout entier naturel n.
   (a) Exprimer le terme général de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Déterminer, en fonction de a, si la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite et si oui, déterminer sa limite.
3. Préciser pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}_+^*$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 5.
Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 > 0$ et, pour tout entier n, on a $0 < u_{n+1} \leqslant 2 - \dfrac{1}{u_n}$.

1. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, on a $2 - \dfrac{1}{x} \leqslant x$.
2. En déduire le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. (*) On note ℓ sa limite. Déduire de l'inégalité $0 < u_{n+1} \leqslant 2 - \dfrac{1}{u_n}$, pour tout entier n, des conséquences sur ℓ et conclure.

Exercice 6.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et strictement positive.
2. Calculer les premiers termes et déterminer si la suite est arithmétique.
3. On considère alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Justifier la bonne définition de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Puis montrer qu'il s'agit d'une suite arithmétique et déterminer son terme général en fonction de n.
4. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 7.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{2u_n + 4}$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est défini et vérifie $u_n > 0$.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{2u_n - 1}{u_n + 1}$ est bien définie et est géométrique.
3. En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 8.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+2} = \dfrac{3}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n$.

1. Montrer que la suite de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$ est une suite géométrique. Exprimer v_n en fonction de n.
2. En déduire une expression de u_{n+1} en fonction de u_n et n.
3. Montrer par récurrence que, pour tout entier n strictement positif, on a $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$.
4. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bornée ? monotone ? convergente ?

Exercice 9.
On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par

$$(S) : \begin{cases} u_0 &= 6, \\ u_{n+1} &= \dfrac{1}{3}u_n + 2 \quad (E) \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation de récurrence homogène associée à (E).
2. Déterminer une suite constante vérifiant la relation de récurrence (E).
3. En déduire l'ensemble des suites solutions de l'équation de récurrence (E).
4. Déterminer l'unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant (S).

5. Déterminer la nature de la suite. Si elle admet une limite, quelle est sa valeur ?
6. Si la valeur du terme initial u_0 change, est-ce que la nature de la suite change ? Si une limite existe, est-ce que sa valeur change ?

Exercice 10.
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{N}$ par

$$(E) : u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2\,(-1)^n\,.$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation de récurrence homogène associée à (E).
2. Déterminer une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général de la forme $v_n = \alpha\,(-1)^n$, pour tout entier naturel n vérifiant la relation de récurrence (E).
3. En déduire l'ensemble des suites solutions de l'équation de récurrence (E).
4. Exprimer en fonction de u_0 le terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant (E).
5. Déterminer la nature de la suite et sa limite éventuelle.

Exercice 11.
En suivant le schéma des exercices précédents, étudier les suites suivantes pour a un nombre réel quelconque :

$$\begin{cases} u_0 &= a, \\ u_{n+1} &= 2u_n - 5. \end{cases}, \quad \begin{cases} u_0 &= a, \\ u_{n+1} &= -3u_n + 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 &= a, \\ u_{n+1} &= -\dfrac{1}{2}u_n + 3. \end{cases}$$

Exercice 12.
Déterminer les solutions des équations de récurrence suivantes avec condition initiale.

1. $u_{n+1} - 2u_n = 4n - 7$ avec $u_0 = 1$;
2. $3u_{n+1} + 2u_n = 10$ avec $u_0 = 1$;
3. $3u_{n+1} + 2u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $u_0 = 0$;
4. $3u_{n+1} + 2u_n = 10 + 14\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $u_0 = 2$.

Exercice 13.
On note p_n le prix de l'année n d'un produit donné. La quantité demandée dépend de ce prix selon la relation $D_n = 220 - 0.4p_n$, alors que la quantité produite dépend du prix de l'année précédente selon la relation $P_n = 0.6p_{n-1} - 30$. On suppose qu'en 2000 on a fixé le prix à 245 euros et que, chaque année, l'offre est égale à la demande.

1. Donner une relation entre p_n et p_{n+1}.
2. En déduire une expression de p_n en fonction de n.
3. Étudier le comportement à long terme de la suite (p_n).
   Y a-t-il un prix d'équilibre possible ?

Exercice 14.
Dans un modèle économique, pour l'année n, on note C_n la consommation, Y_n le revenu, I_n l'investissement et G les dépenses gouvernementales d'un pays (G ne dépend pas de n). Ces quantités sont reliées par les équations suivantes :

$$\begin{cases} C_n - 0.9Y_n &= b \\ I_n - 0.09Y_n &= 0.002Y_{n-1} + e \\ -C_n - I_n + Y_n &= G \end{cases}$$

1. Déterminer l'équation reliant Y_n à Y_{n+1}.
2. Étudier, en fonction de b, e et G, l'évolution de la suite (Y_n).

Exercice 15.
On considère le marché d'un bien de prix p_t pour lequel l'offre S_t et la demande D_t vérifient les relations :

$$\begin{cases} S_t &= -30 + ap_{t-1} \\ D_t &= 70 - 2p_t \end{cases}$$

où a est un nombre réel strictement positif et t un nombre entier positif ou nul quelconque.

1. Dans l'hypothèse d'un ajustement de l'offre sur la demande, déterminer la relation qui lie le prix p_t (à la période t) au prix p_{t-1} (à la période $t-1$).
2. Déterminer le prix à l'équilibre p_e.
3. Déterminer le terme général de la suite $(p_t)_{t\in\mathbb{N}}$.
4. Étudier le comportement de la suite $(p_t)_{t\in\mathbb{N}}$, en fonction de la valeur de a, lorsque le prix initial est $p_0 = 50$.

Exercice 16.
Soit m un réel.
On considère l'équation de récurrence (E) : $5u_{t+1} + mu_t = \dfrac{2}{5^t}$, pour tout entier naturel t

1. Déterminer les suites vérifiant l'équation homogène associée à (E).
2. Déterminer une suite particulière vérifiant (E) éventuellement en faisant des cas selon la valeur de m.
3. Exprimer l'ensemble des solutions de (E).
4. Existe-il des valeurs du paramètre m pour lesquelles les suites solutions convergent ?
5. Dans le cas où $m = 1$, déterminer l'unique solution de (E) vérifiant $u_0 = 12$.

Exercice 17.
On considère l'équation de récurrence suivante

$$(E) \ : \ u_{n+1} = 2u_n + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right), \ \forall n \in \mathbb{N}$$

1. *Préliminaires.*
   (a) Soient a et b deux réels. En utilisant l'égalité $e^{i(a+b)} = e^{ia} \times e^{ib}$, exprimer $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$ et $\sin(b)$.
   (b) En déduire une expression de $\cos\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right)$ et de $\sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right)$ en fonction de $\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.
2. Déterminer une solution particulière de (E) de la forme $v_n = \alpha\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \beta\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$, avec α et β deux réels.
3. *Autre méthode.*
   (a) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs complexes vérifiant la relation de récurrence (EC) : $u_{n+1} = 2u_n + e^{i\frac{\pi}{2}n}$, pour tout entier naturel n, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = \mathrm{Re}\,(u_n)$, pour tout entier naturel n, vérifie (E).
   (b) Déterminer une solution particulière de (EC) de la forme $w_n = \alpha e^{i\frac{\pi}{2}n}$, pour tout entier naturel n, avec α un réel.
   (c) En déduire une solution particulière de (E).
4. En déduire la forme du terme général de l'ensemble des suites vérifiant (E). Exprimer ce terme général en fonction du terme initial.

Exercice 18.
Soit a un réel strictement positif.
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ deux suites définies par la donnée de $u_1 > 0$ et par la donnée de

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad u_{n+1} = a(u_n)^2 \quad \text{et} \quad v_n = \ln(u_n).$$

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est arithmético-géométrique.
2. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
3. Déterminer, selon les valeurs de u_1 et a, la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

Thème 2

Suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 19 (À préparer pour le TD2).
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 0, \\ u_{n+1} &= \sqrt{2u_n + 3} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
4. Réaliser une représentation graphique permettant de visualiser les comportement possible de la suite selon la valeur de son terme initial. Et lister les situations possibles pour les différentes valeurs de u_0.

Exercice 20.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 3, \\ u_{n+1} &= \dfrac{u_n^2}{2u_n - 1} \end{cases}$$

1. Montrer que l'intervalle $[1; +\infty[$ est stable par $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{2x-1}$. En déduire que la suite est bien définie et minorée par 1.
2. Étudier la monotonie de la suite.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
4. À l'aide d'une représentation graphique, déterminer la situation selon la valeur de u_0.

Exercice 21.
Soit a un réel fixé. On considère la suite définie par : $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Montrer que sa limite est 2.
3. On suppose que $a > 2$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.
4. Montrer qu'il existe deux nombres réels b_1 et b_2 ($b_1 < b_2$), tels que, si $a = b_1$ ou $a = b_2$, alors on a $u_1 = 2$.
5. On suppose que $b_1 \leqslant a \leqslant b_2$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
6. On suppose que $a < b_1$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 22.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - x^2$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2. On suppose dans cette question que $u_0 \in [0\,;1]$.
   (a) Montrer que, pour tout entier n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   (c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On suppose maintenant que $u_0 < 0$. Prouver par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.
4. On suppose finalement que $u_0 > 1$. Que dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 23.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}.$$

1. Étudier la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, pour tout réel x.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, u_n est dans $[0, 1]$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
   Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. En déduire que ces deux suites sont convergentes.
4. On note g la fonction $f \circ f$, c'est-à-dire que

$$\forall x \in [0, +\infty[, \qquad g(x) = f \circ f(x) = f(f(x)).$$

   (a) Exprimer $g(x)$ en fonction de x.
   (b) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0, 1]$ et la calculer.
   (c) Vérifier que pour tout n, $v_{n+1} = g(v_n)$ et $w_{n+1} = g(w_n)$.
   En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \alpha$.
   (d) Conclure pour la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 24 (Extrait du CC1 2016-2017).
Soit α un réel strictement supérieur à 1.
On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{\alpha u_n}{1+2u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et strictement positive.
2. On suppose dans cette question que $u_0 = \dfrac{\alpha - 1}{2}$.
   Comment évolue la suite ? Vous pouvez éventuellement calculer ses premiers termes.
3. On suppose dans cette question que $u_0 > \dfrac{\alpha - 1}{2}$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n > \dfrac{\alpha - 1}{2}$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite.
   (c) Est-elle convergente ? Justifier.
4. On suppose dans cette question que $0 < u_0 < \dfrac{\alpha - 1}{2}$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $0 < u_n < \dfrac{\alpha - 1}{2}$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite.
   (c) Est-elle convergente ? Justifier.

5. Dans cette question, on suppose que $u_0 \neq \dfrac{\alpha - 1}{2}$ et on souhaite obtenir une expressions du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour cela, on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour tout entier positif n,

$$v_n = \frac{u_n}{1 - \alpha + 2u_n}.$$

   (a) Justifier la bonne définition de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
   (c) En déduire le terme général de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) Montrer que, pour tout $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $v_0 < 0$.
   (e) Déduire des deux questions précédentes le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (f) En raisonnant uniquement sur l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donner la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (convergence ou divergence) et la valeur, le cas échéant, de sa limite.

Exercice 25.
Soit b un nombre réel strictement positif.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{avec } f(x) = \sqrt{2x + b}.$$

Le but de l'exercice est d'étudier le comportement asymptotique de cette suite.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que la fonction f admet un unique point fixe, que l'on notera α.
3. En étudiant la fonction f sur $\mathbb{R}_+$, montrer que les intervalles $]0;\alpha[$ et $]\alpha;+\infty[$ sont stables par f.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et strictement positive.
5. Dans cette question, on suppose que $0 < u_0 < \alpha$.
   (a) En utilisant la question 3, montrer que $0 < u_n < \alpha$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
6. Dans cette question, on suppose que $u_0 > \alpha$.
   (a) En utilisant la question 3, montrer que $u_n > \alpha$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Conclure sur le comportement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans ce cas.
7. Étudier la cas restant : $u_0 = \alpha$, et résumer les résultats de l'exercice.

Exercice 26.
Étudier graphiquement les suites définies par les relations de récurrence suivantes :

1. $u_{n+1} = u_n^3 - u_n$;
2. $u_{n+1} = u_n^2 + \alpha$, selon la valeur du réel α.

Thème 3

Equations récurrentes en dimension p

Exercice 27 (A préparer pour le TD3).
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On considère la récurrence

$$X_{n+1} = AX_n.$$

Déterminer une expression explicite de X_n.

Exercice 28 (A preparer pour le TD3).
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et le vecteur $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Résoudre l'équation de récurrence en dimension 2 :

$$X_{n+1} = AX_n + B.$$

Exercice 29 (A préparer pour le TD3).
On s'intéresse à l'équation $X_{n+1} = AX_n + B$ où $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.8 & 0.5 \end{pmatrix}$,avec $B = (1, -1)^T$ et $X_0 = (-1, 0)^T$.

1. Déterminer explicitement X_n. Que peut-on dire du comportement asymptotique (lorsque $n \to +\infty$) ?
2. Reprendre la question précédente pour un $X_0 \in \mathbb{R}^2$ quelconque.

Exercice 30 (Plus difficile).
On reprend l'exercice précédent mais avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$

1. Déterminer une solution particulière.
On pourra chercher une solution particulière sous la forme $X_n^{\mathfrak{p}} = nU + V$

2. Calculer X_n pour $X_0 = (a, b)^T$. Que peut-on dire du comportement asymptotique ?

Exercice 31.
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Résoudre l'équation de récurrence (homogène)

$$X_{n+1} = AX_n, \quad X_0 \in \mathbb{R}^2$$

On pourra écrire $A = N - I_2$ et utiliser la formule du binôme

Exercice 32.
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et le vecteur

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donner la solution générale de l'équation de récurrence

$$X_{n+1} = AX_n + B.$$

Exercice 33 (Tiré de la page wikipédia sur les chaines de Markov).
On s'intéresse à une chaine de Markov modélisant un Hamster (Boubou) dans une cage. Boubou à 3 activités (états) possibles : dormir, manger et courir.
Il est susceptible de changer d'activité chaque minute selon les règles suivantes.

- Quand il dort, il a 9 chances sur 10 de ne pas se réveiller la minute suivante.
- Quand il se réveille, il y a 1 chance sur 2 qu'il aille manger et 1 chance sur 2 qu'il parte faire de l'exercice.
- Le repas ne dure qu'une minute, après il fait autre chose.
- Après avoir mangé, il y a 3 chances sur 10 qu'il parte courir dans sa roue, mais surtout 7 chances sur 10 qu'il retourne dormir.
- Courir est fatigant pour Doudou ; il y a 8 chances sur 10 qu'il retourne dormir au bout d'une minute. Sinon il continue en oubliant qu'il est déjà un peu fatigué

On note x_n, y_n et z_n les probabilités respectives d'êtres dans l'état "dormir", "manger" ou "courir" la minute n.
On note $X_n = (x_n, y_n, z_n)^T$ le vecteur de probabilité d'écrivant la répartition des états la minute n.
Soit la matrice de transition $A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.7 & 0.8 \\ 0.05 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$ Pour fixer les idées ont suppose que $X_0 = (1, 0, 0)^T$

1. Justifier que le problème s'écrit
$$X_{n+1} = AX_n$$
.
2. Justifier que X_n est un vecteur de probabilité pour tout $n \in \mathbb{N}$. (C'est-à-dire que X_n a toutes ses composantes positives ou nulles et que leur somme vaut toujours 1).
3. Calculer X_n pour tout n.
4. Le vecteur X_n a-t-il une limite ? Comment interpreter ce résultat ?

Exercice 34.
On s'intéresse à 3 producteurs d'une petite ville et on suit leurs productions d'année en année. L'année $n \in \mathbb{N}$, le premier produit x_n kg de blé, le second produit y_n kg de farine et le troisième z_n kg de pain. On néglige les autres matières.
On considère que les besoins des consommateurs sont constants d'année en année : 200 kg de blé, 500 kg de farine et 1 000 kg de pain.
Chaque année, les producteurs actualisent leur production en fonction des besoins des autres producteurs ; pour cela, ils utilisent les productions de l'année précédente et les règles suivantes :

- pour chaque kilo de farine, il faut 1.5 kg de blé ;
- pour chaque kilo de pain, il faut 0.75 kg de farine ;
- les producteurs mangent : pour chaque kilo de marchandise produite, il faut 0.01 kg de pain.

Enfin, on considère que l'année 0, les productions étaient exactement égales aux besoins des consommateurs.

1. Expliquer pourquoi le système s'écrit

$$\begin{cases} x_{n+1} = 200 + 1.5\, y_n \\ y_{n+1} = 500 + 0.75\, z_n \\ z_{n+1} = 1000 + 0.01(x_n + y_n + z_n) \end{cases}, \qquad (x_0, y_0, z_0) = (200, 500, 1000)$$

2. Résoudre le problème (on ne calculera pas A^n explicitement)
3. Les productions tendent-elles vers une limite ? Si oui, comment interpréter celle-ci ?

Exercice 35 (Suite récurrente d'ordre 2 et interprétation économique).
On modélise l'écart de production x_n (en centaines de tonnes) d'une entreprise par rapport à une production cible. L'entreprise ajuste sa production en fonction des deux années précédentes, tandis qu'un choc de demande extérieure, supposé décroissant au cours du temps, agit comme un terme source.
On considère la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_{n+2} - 1{,}1\, x_{n+1} + 0{,}24\, x_n = 10 \cdot 0{,}9^n, \qquad (x_0, x_1) = (0, 0).$$

1. Se ramener à une équation récurrente vectorielle d'ordre 1 avec terme source

$$X_{n+1} = AX_n + B_n,$$

en précisant l'expression de A et de B_n.

2. On considère d'abord l'équation homogène associée

$$x_{n+2} - 1{,}1\, x_{n+1} + 0{,}24\, x_n = 0.$$

(a) Déterminer le polynôme caractéristique $P(\lambda)$.
(b) Calculer ses racines et montrer que

$$\lambda_1 = 0{,}8, \qquad \lambda_2 = 0{,}3.$$

(c) En déduire la forme générale des solutions de l'équation homogène.

3. On cherche une solution particulière $x_n^{\mathfrak{p}}$ de l'équation affine

$$x_{n+2} - 1{,}1\, x_{n+1} + 0{,}24\, x_n = 10 \cdot 0{,}9^n.$$

(On pourra chercher une solution particulière de la forme $x_n^{\mathfrak{p}} = K \cdot 0{,}9^n$, où K est une constante réelle.)

4. En déduire l'expression générale de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis déterminer les constantes à l'aide des conditions initiales.
5. Étudier le comportement asymptotique de (x_n) et interpréter économiquement, de manière concise, le rôle :
   - des valeurs propres 0,8 et 0,3,
   - du terme source $10 \cdot 0{,}9^n$.

Exercice 36 (Suite récurrente d'ordre 3 avec oscillations).
On considère la suite vectorielle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_{n+3} + x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0, \qquad (x_0, x_1, x_2) = (1, 0, 0).$$

1. Se ramener à une équation récurente vectorielle d'ordre 1 homogène.

$$X_{n+1} = AX_n.$$

2. Montrer que les valeurs propres de A sont :

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_{2,3} = \frac{1}{2}\left(1 \pm i\sqrt{3}\right) = e^{\pm i\pi/3}.$$

3. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est oscillante et périodique.
4. Donner l'expression explicite de x_n.

Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercice 37 (A preparer pour le CM5).
Résoudre sur $\mathbb{R}$, sauf mention explicite, les équations différentielles suivantes.

1. $y'(t) = 0$;
2. $y'(x) + 2x = 0$ et $y(0) = 10$;
3. $y'(t) = 3te^{t^2}$;
4. $y'(t) = \dfrac{2t}{t^2 + e}$ et $y(0) = 2$;
5. $y'(x) = \sin(x)\cos(x)$;
6. $y'(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ sur $\mathbb{R}_+$;
7. $y'(t) = \dfrac{t^3}{t^4 + a}$ avec $a \in \mathbb{R}_+$;
8. $y'(x) = \dfrac{\alpha(x+3)}{x^2 + 6x - 40}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 38.
Soit $a \in \mathbb{R}$. En utilisant vos connaissances sur les équations différentielles linéaires d'ordre 1 (homogènes), trouver tous les fonctions f définies sur $\mathbb{R}_+^*$ dont l'élasticité $E\ell_x(f)(x) = x\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ vaut :

1. $E\ell_x(f)(x) = a$;
2. $E\ell_x(f)(x) = ax$;
3. $E\ell_x(f)(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$;
4. $E\ell_x(f)(x) = \dfrac{1}{\ln(x)} + a$.

Exercice 39 (À préparer pour le TD4).
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

1. $y' + 2y = 0$;
2. $y' + 2y = 3$;
3. $y' + 2y = 3$ et $y(0) = -1$.

Exercice 40.
Soit (E) l'équation différentielle $y' - 2y = -4t$ où y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' sa fonction dérivée.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E_0) sans second membre associée.
2. Déterminer une solution particulière y_p de (E). En déduire les solutions générales de (E).
3. En déduire une solution de (E) vérifiant la condition $y(0) = 3$.

Exercice 41.
On considère l'équation différentielle

$$(E) \ : \ y' + y = \frac{1}{1 + e^x}$$

où y est une fonction de la variable x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' sa fonction dérivée.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + y = 0$.
2. Déterminer une solution particulière y_p de (E). En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
3. Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1 + \ln(2)$.

Exercice 42.
Soit l'équation différentielle

$$(E) \ : \ (1+x)y' - y = \ln\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $[0 \ ; \ +\infty[$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+$ l'équation différentielle : $(E') : (1+x)y' - y = 0$.
2. Déterminer la valeur de la constante C pour que la fonction $y_0(x) = \ln(1+x) + C$ soit une solution particulière de l'équation (E), définie sur $\mathbb{R}_+$. En déduire la solution générale de l'équation (E).
3. Déterminer la fonction Φ solution de l'équation (E) vérifiant : $\Phi(0) = 0$.

Exercice 43.
On souhaite étudier la meilleure fenêtre de temps pour boire notre café à la bonne température. D'après Wikipédia, on a l'information suivante.

> La loi de refroidissement de Newton, énoncée par Isaac Newton, stipule que le taux de perte de chaleur d'un corps est proportionnel à la différence de température entre le corps et le milieu environnant. Cette formulation n'est pas très précise, et présuppose un milieu et un corps homogène ainsi qu'un milieu à température constante.

On peut en déduire une version simplifiée de l'évolution de la chaleur y du corps étudié (en degré Celsius) selon le temps t (en minutes).

$$(E_R) \ : \ y'(t) = -r(y(t) - T), \ \forall t \in [0; +\infty[$$

avec r le coefficient de refroidissement, qui est une constante positive dépendant de l'environnement, et T la température ambiante (en degré Celsius).

1. Donner l'équation homogène associée à (E_R) ainsi que son ensemble de solutions.
2. Donner une solution particulière de (E_R).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E_R).
4. Commenter l'évolution à long terme de la température du corps.
5. Je souhaite maintenant appliquer tout cela à mes tasses de café.
   Lors d'une première expérience dans mon bureau ayant une température ambiante de 20°C, j'ai préparé un café à 90°C à l'instant initial $t = 0$ et au bout de 10 minutes, il était parfait à 55°C.
   (a) En déduire la valeur du coefficient de refroidissement au centième près.
   (b) Si je prépare un café dans les mêmes conditions, donner la fenêtre de consommation pendant laquelle, selon cette modélisation, le café sera entre 50°C et 60°C.

Exercice 44.
On note $y(t)$ le nombre de personnes dont les foyers sont équipés d'une liaison internet et on suppose que le taux selon lequel de nouvelles personnes obtiennent l'accès est proportionnel au nombre de personnes qui n'ont pas encore l'accès. Du coup, si P désigne la taille de la population, l'équation différentielle vérifiée par y est alors

$$(E) \ : \ y'(t) = k(P - y(t)),$$

où k est une constante strictement positive.

1. On fixe $P = 10$ et $k = 2$.
   (a) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans ce cadre.

(b) Déterminer la solution de (E) compte tenu de $y(0) = 0$, toujours pour $P = 10$ et $k = 2$.

(c) Résoudre l'équation $y' + 2y = 20 + \dfrac{e^{-2t}}{t^2}$.

2. On ne se fixe plus de valeurs pour P et k.

(a) Déterminer la solution de (E) compte tenu de $y(0) = 0$ en fonction de P et k.

(b) Déterminer la limite en $+\infty$ de y en fonction de P et k. Interpréter.

Exercice 45.

On considère le marché d'un bien sur lequel se confrontent, à chaque instant t, une offre S et une demande D. On note P le prix constaté et $\widehat{P}$ le prix espéré par les producteurs. Toutes les fonctions P, $\widehat{P}$, S et D sont supposées continues et dérivables. On suppose également que le prix s'ajuste à un niveau assurant l'équilibre entre l'offre et la demande et que les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} S(t) &= a\widehat{P}(t) - 20 \\ D(t) &= -bP(t) + 200 \\ \widehat{P}(t) &= P(t) + dP'(t) \end{cases}$$

avec a, b et d trois réels tels que $a > 0$, $b > 0$ et $d \neq 0$.

1. Déterminer une équation différentielle (E) vérifiée par la fonction de prix faisant intervenir uniquement a, b et d.
2. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
3. Trouver une solution particulière constante de (E).
4. Donner la solution de (E) correspondant à un prix initial $P_0 = P(0)$.
5. Discuter du comportement asymptotique du prix.
6. Déterminer la solution correspondant au cas où $a = 3$, $b = 2$, $d = 5/3$, $P_0 = 30$.

Exercice 46.

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ les équations différentielles suivantes, selon les valeurs des différents paramètres intervenants :

1. $my'(t) - y(t) = e^{2t}$ et $y(0) = 0$ avec $m > \dfrac{1}{2}$;
2. $y'(t) - 2ty(t) = \alpha t$;
3. $ty'(t) - my(t) = \beta t^{\alpha}$.

Exercice 47.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

1. $y' + y = 4$;
2. $y' - y = e^t$, $y(0) = -2$;
3. $y' - y = 1 - t$, $y(0) = 1$;
4. $y' - 4y = x^2$;
5. $2y' - y = -t^2 + 5t$, $y(-1) = 5$;
6. $y' - 4y = x^2 + 2e^x$, $y(0) = 0$.
7. $y' - 2xy = -2x$, $y(0) = -2$ sur $\mathbb{R}$;
8. $(1 + x^2)y' + 2xy = 0$, $y(1) = 2$ sur $\mathbb{R}$.

Thème 5

Équations différentielles non linéaires d'ordre 1

Exercice 48 (A préparer pour le TD5).
On s'intéresse au problème de Cauchy suivant

$$(P) \ : \ \begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{avec } f(x) = x\,(x-1)\,(x-0.5)\,.$$

1. Réaliser une représentation graphique de la fonction f.
2. Donner les points d'équilibre de l'équation $y' = f(y)$.
3. On suppose que $y_0 \in]0; 0.5[$. On note y la solution maximale de (P) et T son intervalle de définition.
   (a) Justifier que pour tout $t \in T$, on a $y(t) \in]0; 0.5[$.
   (b) Que vaut T ?
   (c) Justifier que y est strictement croissante.
   (d) En déduire que y admet une limite finie.
   (e) Que vaut sa limite en $+\infty$?
4. On suppose maintenant que $y_0 \in]0.5; 1[$. On note y la solution maximale de (P) et T son intervalle de définition. En reprenant le même cheminement qu'à la question précédente, justifier que y est définie sur $\mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0.5$.
5. On suppose que $y_0 > 1$. On note y la solution maximale de (P) et T son intervalle de définition.
   (a) Justifier que pour tout $t \in T$, on a $y(t) > 1$.
   (b) En déduire le sens de variation de y.
   (c) y admet-elle une limite finie ? Commenter.
6. Résumer les différentes situations en fonction de la valeur y_0.

Exercice 49.
On s'intéresse au problème de Cauchy suivant

$$(P) \ : \ \begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{avec } f(x) = x\left(e^{-x} - \frac{1}{e}\right).$$

1. Donner les points d'équilibre de l'équation $y' = f(y)$. On les note a et b avec $a < b$.
2. Réaliser une représentation graphique de la fonction f. Seules les intersections entre la courbe et l'axe des abscisses, ainsi que la position de la courbe avec l'axe des abscisse doivent être précis.
3. Décrire, à l'aide du graphique précédent, les différents comportements des solutions de (P) en fonction de la valeur y_0, sans justification.
4. On suppose que $y_0 \in]0; b[$. On note y la solution maximale de (P) et T son intervalle de définition.
   (a) Justifier que pour tout $t \in T$, on a $y(t) \in]0; b[$.
   (b) Justifier le fait que $T = \mathbb{R}$.
   (c) Donner le sens de monotonie de y et le justifier.
   (d) Justifier pourquoi y admet une limite finie en $+\infty$ et pourquoi celle-ci vaut 1.

Exercice 50.
Soit a un réel. On s'intéresse au problème de Cauchy suivant

$$(P) \ : \ \begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases} \quad \text{avec } f(x) = -x(x-a).$$

Il existe différentes situations selon la valeur du paramètre a.

1. Déterminer les points d'équilibre selon la valeur de a.
2. Représenter graphiquement les 3 situations.
3. Dans quelle(s) situation(s) y aura-t-il *convergence* vers un état d'équilibre non nul ?
4. Dans chacune des 3 situations, détailler le comportement des solutions.
5. Dans le cas où $a = 0$, détailler toutes les justifications du comportement de la solution maximale.

Exercice 51.
Soit a un réel. On s'intéresse au problème de Cauchy suivant

$$(P) \ : \ \begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases} \quad \text{avec } f(x) = x\,(x-1)\,(x-2) - \alpha x.$$

Il existe différentes situations selon la valeur du paramètre α :

$$(i)\ \alpha < -\frac{1}{4} \quad ; \qquad (ii)\ \alpha = -\frac{1}{4} \quad ; \qquad (iii)\ -\frac{1}{4} < \alpha < 2 \quad ; \qquad (iv)\ \alpha = 2 \quad ; \qquad (v)\ \alpha \geqslant 2.$$

1. Calculer les points d'équilibre de l'équation $y' = f(y)$, en fonction de α.
2. Esquisser, pour chaque situation, le diagramme de phase correspondant.
3. Dans quelle(s) situation(s) y aura-t-il *convergence* vers un état d'équilibre non nul ? Et préciser la valeur de cet état d'équilibre.
4. Dans quelle(s) situation(s), la solution maximale tend vers 0 en $+\infty$?
5. Dans quelle(s) situation(s), la solution maximale admettra une limite infinie en $+\infty$ ou en temps fini ?

Thème 6

Equations différentielles en dimension p

Exercice 52 (A préparer pour le TD6).
On s'interesse à une population de bactérie se déplacant aléatoirement entre deux compartiment. On note $Y = (y_1, y_2)^T$ la concentration (unité : u.c.) de bactérie dans chaque compartiment. On note également u.t. l'unité de temps. Les bactéries meurent à un taux fixé à $m = 1$ (en $(u.t.)^{-1}$.
Enfin, dans le premier compartiment, un tuyau ensemence régulirement le milieu avec une quantité de 1 *u.c.* par *u.t.*
Enfin la vitesse de déplacement est définie par $d > 0$ esprimé en $(u.t.)^{-1}$.
Soit $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $E = (1,0)^T$. La situation est modélisée par l'équation différentielle en dimension 2 :

$$Y' = dMY - Y + E.$$

1. Interpréter les termes.
2. Réécrire l'équation sous la forme
$$Y' = AY + E$$
où A dépend du parametre d. et résoudre cette équation.
3. Quelle est le comportement en temps long de la population ?

Exercice 53.
Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle

$$Y' = AY + B$$

muni de la condition initiale $Y(0) = (1,0)^T$ avec $B = (1,2)^T$ et $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 54.
On modélise un marché par deux variables :

$$p(t) \quad \text{(prix)}, \qquad q(t) \quad \text{(quantité échangée)}.$$

Le mécanisme d'ajustement dynamique est donné par le système linéaire d'ordre 1 :

$$\begin{cases} p'(t) = -2\,p(t) + q(t) + 4, \\ q'(t) = \quad p(t) - 4\,q(t) + 10. \end{cases}$$

1. Écrire le système sous forme matricielle $Y'(t) = AY(t) + B$.
2. Déterminer l'équilibre de marché (p^*, q^*) en résolvant le système stationnaire $\begin{cases} 0 = -2p + q + 4, \\ 0 = p - 4q + 10. \end{cases}$
3. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ et vérifier que A est diagonalisable.
4. Résoudre l'équation homogène.

5. En déduire la forme générale de la solution $Y(t)$
6. Avec les conditions initiales
$$p(0) = 2, \qquad q(0) = 5,$$
déterminer la solution explicite $(p(t), q(t))$.
7. Interpréter économiquement le résultat.

Exercice 55.
On modélise la concentration $x(t)$ d'un médicament dans le sang. Le médicament est injecté par perfusion à débit constant $Q = 5(mg.h^{-1})$. L'organisme élimine le médicament proportionnellement à la concentration, et la distribution dans le corps présente une inertie. On obtient l'équation différentielle :

$$x''(t) + 4\,x'(t) + 3\,x(t) = 5.$$

de plus $x(0) = x'(0) = 0$.
Calculer $x(t)$ et en déduire la valeur limite de la concentration du médicament.

Exercice 56.
On considère un système mécanique constitué d'une masse m attachée à un ressort de raideur k et à un dispositif d'amortissement visqueux de coefficient c. Une force extérieure constante F_0 agit sur la masse. La position de la masse à l'instant t est notée $x(t)$. Le mouvement est régi par l'équation différentielle :

$$m\,x''(t) + c\,x'(t) + k\,x(t) = F_0.$$

On suppose que les paramètres vérifient : $c^2 > 4mk$
Calculer $x(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. sachant que $x(0) = x'(0) = 0$ (on n'explicitera pas les vecteurs propres). Que se passe-t-il lorsque $t \to +\infty$?

Exercice 57 (Système linéaire en dimension 3 issu de la biologie, avec terme source).
On modélise l'évolution de trois populations cellulaires dans un tissu biologique :
- $x(t)$: cellules saines, - $y(t)$: cellules infectées, - $z(t)$: cellules immunitaires activées.
On suppose que, dans un régime linéaire, leur dynamique est donnée par

$$\begin{cases} x'(t) = -0.2\,x(t) + 0.1\,y(t) + 5, \\ y'(t) = 0.3\,x(t) - 0.5\,y(t) + 0.2\,z(t) + 1, \\ z'(t) = 0.1\,y(t) - 0.4\,z(t) + 2, \end{cases} \qquad (x(0), y(0), z(0)) = (10, 2, 0).$$

1. Écrire ce système sous forme matricielle
$$X'(t) = AX(t) + B, \qquad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$
2. Déterminer explicitement la matrice A et le vecteur B.
3. Considérer d'abord le système homogène $X'(t) = AX(t)$. Calculer le polynôme caractéristique de A et montrer qu'il admet trois valeurs propres réelles négatives :
$$\lambda_1 = -0.1, \qquad \lambda_2 = -0.4, \qquad \lambda_3 = -0.7.$$
4. En déduire la forme générale de la solution du système homogène :
$$X_h(t) = C_1 e^{-0.1t} v_1 + C_2 e^{-0.4t} v_2 + C_3 e^{-0.7t} v_3.$$
5. Chercher une solution particulière constante X_p du système complet, et la déterminer explicitement.

6. En déduire la solution générale du système complet, puis déterminer les constantes C_1, C_2, C_3 à partir des conditions initiales.
7. Étudier le comportement asymptotique de $X(t)$ lorsque $t \to +\infty$.
8. Donner une interprétation biologique concise : rôle des interactions, effet du terme source, existence d'un état stationnaire non nul.

Exercice 58 (Ordre 2 et interprétation économique).
On considère un marché concurrentiel pour un bien homogène. On note : - $p(t)$ le prix du bien au temps t, - p^* le prix d'équilibre de long terme (celui qui égalise offre et demande à long terme).
Les ajustements de prix sont lents et soumis à des frictions (coûts d'ajustement, rigidités), et la demande subit un choc permanent (politique publique, changement de préférences), modélisé par un terme source constant.
On admet que la dynamique de p vérifie l'équation différentielle

$$p''(t) + 3\,p'(t) + 2\,p(t) = 10,$$

avec les conditions initiales

$$p(0) = 4, \qquad p'(0) = 0.$$

1. Vérifier qu'il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants avec terme source.
2. Considérer l'équation homogène associée

$$p''(t) + 3\,p'(t) + 2\,p(t) = 0.$$

   (a) Déterminer le polynôme caractéristique.
   (b) Calculer ses racines réelles.
   (c) En déduire l'expression générale des solutions de l'équation homogène.
3. Chercher une solution particulière de l'équation complète sous la forme constante

$$p^{\mathfrak{p}}(t) = C, \quad C \in \mathbb{R},$$

   et déterminer C.
4. En déduire la solution générale de l'équation complète, puis déterminer la solution vérifiant les conditions initiales.
5. Étudier le comportement de $p(t)$ lorsque $t \to +\infty$.
6. Donner une interprétation microéconomique concise : rôle des termes $3p'$, $2p$, du terme source 10, nature de l'ajustement vers l'équilibre (stabilité, oscillations ou non, dépendance aux conditions initiales).

Exercice 59 (Ordre 2 avec terme source et interprétation mécanique).
On considère un système masse–ressort soumis à une force extérieure. La position de la masse par rapport à sa position d'équilibre est notée $y(t)$. Le mouvement est modélisé par l'équation différentielle :

$$y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 10\cos(2t),$$

avec les conditions initiales

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0.$$

1. Vérifier qu'il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de l'équation homogène associée et ses racines.
3. En déduire la solution générale de l'équation homogène.
4. Chercher une solution particulière sous la forme

$$y_p(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t),$$

   et déterminer les constantes A et B.

5. En déduire la solution générale de l'équation complète, puis déterminer la solution vérifiant les conditions initiales.
6. Étudier le comportement asymptotique de $y(t)$ lorsque $t \to +\infty$.
7. Donner une interprétation mécanique concise : rôle de l'amortissement, de la force extérieure, et nature du régime final.