Année 2026/2027

L2 Économie

Module 2 - Outils Quantitatifs
Mathématiques pour l'Économiste 4

Polycopié de cours

Sten Madec (sur la base du cours de Julie Scholler)

université de TOURS
Faculté de droit, économie & sciences sociales

Table des matières

Chapitre 1 - Rappel et compléments sur les suites numériques **3**
1.1 Généralités sur les suites réelles 3
1.2 Nature d'une suite 5
1.3 Propriétés de limites 7
1.4 Suites usuelles 13

Chapitre 2 - Équations de récurrence **21**
2.1 Vocabulaire 21
2.2 Équations de récurrence linéaires du premier ordre à coefficients constants 22
2.3 Équations de récurrence du premier ordre non linéaires 31
2.4 Systèmes linéaires de suites récurentes. Suites récurrentes linéaires d'ordre p. 37

Chapitre 3 - Équations différentielles du premier ordre **51**
3.1 Équations « primitives » 51
3.2 Équations différentielles linéaires du premier ordre 52
3.3 Équations différentielles du premier ordre non linéaires autonomes 60
3.4 Systèmes d'équations différentielles linéaires. Equations differentielle linéaire d'ordre p. 64

Chapitre 1

Rappel et compléments sur les suites numériques

1. Généralités sur les suites réelles

1.1. Définition des suites réelles

Définition. Suite réelle, terme général d'une suite

Une **suite réelle** $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une fonction dont l'ensemble de départ est $\mathbb{N}$ (ou $[\![n_0, +\infty[\![$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$)

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad n \longmapsto u_n.$$

u_n est appelé le **terme général** de la suite. Son **indice** ou **rang** est n.

On peut aussi définir des suites indexées sur l'ensemble $[\![n_0, +\infty[\![$ des entiers supérieurs ou égaux à un entier n_0.,Une telle suite est notée $(u_n)_{n\geqslant n_0}$. En pratique, on commence souvent à 0 ou à 1.
Pour ne pas alourdir les énoncés, nous considérons dans ce cours des suites définies sur $\mathbb{N}$, si rien de particulier n'est précisé. La généralisation aux autres suites est triviale.

Remarque.
Il ne faut jamais oublier les parenthèses qui permettent de faire la différence entre une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et son terme général u_n qui est un réel.

Remarque.
Une suite peut être définie de différentes façons :

- de façon **explicite** : pour tout entier positif n, on a $u_n = f(n)$;
- de façon **récurrente** : pour tout entier positif n, on a $u_{n+1} = f(u_n)$ ou $u_{n+k} = f(u_{n+k-1}, u_{n+k-2}, \ldots, u_n)$.

Exemples de suites définies explicitement :

- la suite de terme général : $u_n = 3n^2 + 5$;
- la suite de terme général : $u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

Exemple de suites définies par récurrence :

- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$;
- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

1.2. Variations d'une suite

Définition. Variations d'une suite réelle

On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

- **croissante** (resp. **strictement croissante**) si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$ (resp. $u_{n+1} > u_n$) ;
- **décroissante** (resp. **strictement décroissante**) si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$) ;
- **monotone** si elle est soit croissante soit décroissante ;
- **strictement monotone** si elle est soit strictement croissante soit strictement décroissante.

On définit de manière évidente la notion de suite croissante ou décroissante à partir d'un certain rang.
Une suite constante à partir d'un certain rang est dite **stationnaire**.

Méthode. Étudier les variations d'une suite

Pour montrer qu'une suite est croissante (respectivement décroissante), on peut utiliser l'une des méthodes suivantes.

- On montre que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ (resp. $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$).
- Si la suite est à termes strictement positifs, on montre que pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ (resp. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$).

Pour que le sens de variation soit stricte, il faut que l'inégalité soit stricte.

Exemple.
Étudions le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $\dfrac{n^n}{n!}$.
On donne deux méthodes.

- Soit n dans $\mathbb{N}^\star$. On prend $n > 0$ pour de pas se retrouver par une division par 0.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}n!}{n^n(n+1)!} = \frac{(n+1)(n+1)^n n!}{n^n(n+1)!} = (n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n > 1$$

  car $\dfrac{n+1}{n} > 1$, ce qui prouve que la suite est strictement croissante à partir de l'indice 1.
  De plus, $u_0 = 1 = u_1$ donc la suite est croissante.

- Soit n dans $\mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)^n(n+1)}{n!(n+1)} - \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)^n}{n!} - \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)^n - n^n}{n!} \geqslant 0,$$

  et $u_{n+1} - u_n > 0$ si $n > 0$. ce qui prouve que la suite est croissante et strictement croissante à partir de l'indice 1.

Définition. Suites majorées, minorées, bornées

- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** si
$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leqslant M.$$
- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** si
$$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geqslant m.$$
- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** si elle est minorée et majorée :
$$\exists m \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad m \leqslant u_n \leqslant M.$$
ou de manière équivalente
$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n| \leqslant M.$$

Exemple.
Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ est bornée.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n+1 \geqslant 1$ donc $\dfrac{1}{n+1} \leqslant 1$ puisque la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$.
Par ailleurs, on a $|(-1)^n| = 1$ donc finalement, $|u_n| \leqslant 1$.
Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

2. Nature d'une suite

2.1. Suite convergente

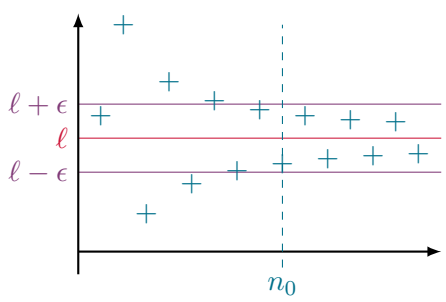
Définition informelle :
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite convergente s'il existe un nombre $\ell \in \mathbb{R}$ tel que, si on attend suffisamment (c'est-à-dire pour n assez grand), u_n va se rapprocher d'aussi près que l'on veut de ℓ.

Définition. Suite convergente

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers un réel ℓ, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, si et seulement si
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, \qquad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$
ce qui revient à dire
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, \qquad u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[.$$

Ainsi, une suite converge vers ℓ si, quelque soit ε (aussi petit que l'on veut), on peut trouver un rang n_0 (dépendant de ε) à partir duquel tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.

Si la suite converge, alors à partir du rang n_0, tous les termes sont dans la bande de largeur 2ε.
Si on diminue ε, alors le rang à partir duquel les termes sont dans la bande sera supérieur ou égal à n_0.



Proposition. Caractère borné des suites convergentes

Toute suite convergente est bornée.

Remarque.
La réciproque est fausse : il existe des suites bornées qui ne convergent pas.

Exemple.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n := (-1)^n$$

est bornée par -1 et 1 mais ne converge pas.

Proposition. Unicité de la limite

Quand une suite est convergente, sa limite est unique.

2.2. Suite divergente

Définition. Suite divergente

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- a pour **limite $+\infty$**, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, si et seulement si

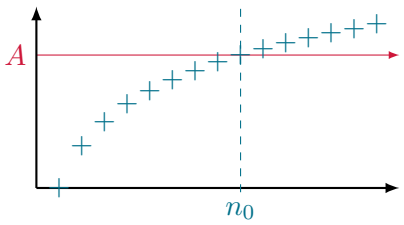
$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, \qquad u_n > A.$$

- a pour **limite $-\infty$**, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, \qquad u_n < A.$$

- est **divergente** si et seulement si elle admet pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ ou n'admet pas de limite.

Ainsi, une suite diverge vers $+\infty$ si, quelque soit le réel A, il existe un rang n_0 (dépendant de A) à partir duquel les termes de la suite sont supérieurs à A.
Si on augmente A, alors le rang à partir duquel les termes seront supérieurs à A sera supérieur ou égal à n_0.



Remarque.
Il ne faut pas confondre la notion de suite divergente et de suite n'admettant pas de limite.
Il existe des suites divergentes qui admettent une limite, auquel cas la limite est infinie.

Proposition.

- Toute suite qui tend vers $+\infty$ est minorée.
- Toute suite qui tend vers $-\infty$ est majorée.

2.3. Généralités

Définition. Nature d'une suite

On appelle **nature** d'une suite son caractère convergent ou divergent.

3. Propriétés de limites

3.1. Opérations sur les limites

Proposition. Limite de la somme de deux suites

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Soient ℓ et ℓ' deux réels.

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ', alors $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell+\ell'$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors la suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, alors la suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

En particulier, on a les résultats suivants.

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers un réel ou $+\infty$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors la suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers un réel ou $-\infty$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, alors la suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

Remarque.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, alors on ne peut rien dire *a priori*.
C'est une **forme indéterminée** : il n'existe pas de théorème général mais la limite peut exister.

Exemple.

- Si pour tout entier naturel n, $u_n=n$ et $v_n=-n+\ell$, où ℓ désigne un réel, alors $u_n+v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
- Si pour tout entier naturel n, $u_n=n^2$ et $v_n=-n$, alors $u_n+v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- Si pour tout entier naturel n, $u_n=n$ et $v_n=-n^2$, alors $u_n+v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
- Si pour tout entier naturel n, $u_n=n$ et $v_n=-n+(-1)^n$, alors la suite de terme général $u_n+v_n=(-1)^n$ n'admet pas de limite.

Proposition. Limite du produit d'une suite par un scalaire

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Soit λ un réel non nul.

- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ, alors la suite $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda\ell$.
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors la suite $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\begin{cases}+\infty & \text{si } \lambda>0\\ -\infty & \text{si } \lambda<0\end{cases}$.
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, alors la suite $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\begin{cases}-\infty & \text{si } \lambda>0\\ +\infty & \text{si } \lambda<0\end{cases}$.
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite, alors la suite $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

Remarque.
Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si $\lambda = 0$, alors la suite $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle donc admet pour limite 0.

Proposition. Somme d'une suite convergente et d'une suite divergente

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite divergente. Alors la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Remarque.
On ne peut rien dire *a priori* sur la somme de deux suites divergentes.

Proposition. Limite d'un produit de deux suites

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Soient ℓ et ℓ' deux réels.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ', alors $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\ell'$.
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et si, à partir d'un certain rang,
   - $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par une constante strictement positive, alors $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
   - $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par une constante strictement négative, alors $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.
4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ et si, à partir d'un certain rang,
   - $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par une constante strictement positive, alors $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.
   - $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par une constante strictement négative , alors $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Exemple.
Montrons que dans le cas de la forme indéterminée « $0 \times +\infty$ », tous les cas peuvent se présenter.

- Si pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{\ell}{n}$, où ℓ désigne un réel, et $v_n = n$, alors $u_nv_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
- Si pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ et $v_n = n$, alors $u_nv_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$.
- Si pour tout entier naturel n non nul, $u_n = -\dfrac{1}{n^2}$ et $v_n = n$, alors $u_nv_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^-$.
- Si pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = n^2$, alors $u_nv_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- Si pour tout entier naturel n non nul, $u_n = -\dfrac{1}{n}$ et $v_n = n^2$, alors $u_nv_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
- Si pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $v_n = n$, alors $u_nv_n = (-1)^n$ n'admet pas de limite.

Proposition. Limite de l'inverse

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et soit ℓ un réel *non nul*.

1. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel non nul ℓ, alors la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers le réel $\frac{1}{\ell}$.
2. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, alors la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers 0.
3. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et si tous ses termes sont strictement positifs (respectivement négatifs) à partir d'un certain rang, alors la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

Exemple.
Dans le cas de la forme indéterminée « $\frac{1}{0}$ », les différentes possibilités sont $+\infty$, $-\infty$ ou pas de limite.

- Si pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \frac{1}{n}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.

- Si pour tout entier naturel n non nul, $u_n = -\frac{1}{n}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$.

- Si pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, alors la suite de terme général $\frac{1}{u_n} = \frac{n+1}{(-1)^n}$ n'admet pas de limite.

Remarque.
On peut retenir

$$\text{« } \frac{1}{0^+} = +\infty \text{ »}, \qquad \text{« } \frac{1}{0^-} = -\infty \text{ »} \qquad \text{et} \qquad \text{« } \frac{1}{\infty} = 0 \text{ »},$$

mais ces abréviations ne doivent *pas* être utilisées dans la rédaction d'une solution.

Proposition. Limite du quotient de deux suites

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
Soient ℓ un réel et ℓ' un réel non nul.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ', alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$.
2. (a) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et si tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang, alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\begin{cases}+\infty & \text{si } \ell > 0\\ -\infty & \text{si } \ell < 0\end{cases}$.
   (b) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et si tous ses termes sont strictement négatifs à partir d'un certain rang, alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\begin{cases}-\infty & \text{si } \ell > 0\\ +\infty & \text{si } \ell < 0\end{cases}$.
3. (a) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\pm\infty$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ', alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\begin{cases}\pm\infty & \text{si } \ell' > 0\\ \mp\infty & \text{si } \ell' < 0\end{cases}$.
   (b) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\pm\infty$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\begin{cases}\text{minorée par une constante strictement positive}\\ \text{majorée par une constante strictement négative}\end{cases}$, alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\begin{cases}\pm\infty\\ \mp\infty\end{cases}$.

Remarque.
Les formes indéterminées sont « $\frac{\infty}{\infty}$ », « $\frac{0}{0}$ » et « $\frac{\infty}{0}$ » (pour le dernier, si le quotient n'est pas de signe constant à partir d'un certain rang, alors il n'y a pas de limite).
En revanche, « $\frac{\infty}{0^+}$ » et « $\frac{\infty}{0^-}$ » ne sont pas des formes indéterminées.

Exemple.
Dans le cas de la forme indéterminée « $\frac{+\infty}{+\infty}$ », tous les cas non négatifs peuvent se présenter.

- Si pour tout entier naturel n, $u_n = \ell n$, où ℓ est dans $\mathbb{R}_+^\star$, et $v_n = n$, alors $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
- Si pour tout entier naturel n, $u_n = n$ et $v_n = n^2$, alors $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$.
- Si pour tout entier naturel n, $u_n = n^2$ et $v_n = n$, alors $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- Si pour tout entier naturel n, $u_n = n\left(2 + (-1)^n\right)$ et $v_n = n$, alors la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n} = 2+(-1)^n$ n'a pas de limite.

3.2. Limites de suites et fonctions

Proposition. Limite d'une fonction d'une suite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers ℓ (un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$).
Soit f une fonction telle que $f(x) \xrightarrow[x\to\ell]{} \lambda$ (un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$).
Alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers λ. En particulier, si f est une fonction continue au point ℓ, alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$.

Exemple.

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers ℓ (un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$).
  Alors la suite $(e^{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\begin{cases} +\infty & \text{si } \ell = +\infty \\ e^{\ell} & \text{si } \ell \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{si } \ell = -\infty \end{cases}$
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive qui tend vers ℓ (un réel positif ou $+\infty$).
  Alors la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\begin{cases} +\infty & \text{si } \ell = +\infty \\ \ln(\ell) & \text{si } \ell \in \mathbb{R}_+^\star \\ -\infty & \text{si } \ell = 0 \end{cases}$
- – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive qui tend vers ℓ (un réel positif ou $+\infty$).
  Pour tout réel α dans $\mathbb{R}_+^\star$, la suite $(u_n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\begin{cases} +\infty & \text{si } \ell = +\infty \\ \ell^\alpha & \text{si } \ell \in \mathbb{R}_+^\star \\ 0 & \text{si } \ell = 0 \end{cases}$
  – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive qui tend vers ℓ (un réel positif ou $+\infty$).
  Pour tout réel α dans $\mathbb{R}_-^\star$, la suite $(u_n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\begin{cases} 0 & \text{si } \ell = +\infty \\ \ell^\alpha & \text{si } \ell \in \mathbb{R}_+^\star \\ +\infty & \text{si } \ell = 0 \end{cases}$

3.3. Théorèmes d'encadrement

Théorème.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles.

- Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent la même limite réelle ℓ et si
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.$$
alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et admet pour limite ℓ.
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ et si
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leqslant v_n,$$
alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
- Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ et si
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leqslant v_n,$$
alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Exemple.

Pour tout entier n dans $\mathbb{N}^\star$, on a $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ donc $\dfrac{-1}{n} \leqslant \dfrac{(-1)^n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Or les suites $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $\left(\dfrac{-1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ convergent vers 0.

Ainsi, d'après le théorème de convergence par encadrement, la suite $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge, et sa limite est 0.

Pour tout entier naturel n, $n - 1 \leqslant n + (-1)^n$.

Or la suite $(n-1)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

D'après le théorème de divergence par minoration, on en déduit que la suite $(n + (-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

3.4. Théorème de la limite monotone

Théorème. Théorème de la limite monotone

Toute suite réelle monotone admet une limite (finie ou infinie).

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante.
   - Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par un réel M, alors elle converge vers un réel $\ell \leqslant M$.
   - Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante.
   - Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par un réel m, alors elle converge vers un réel $\ell \geqslant m$.
   - Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée, alors elle diverge vers $-\infty$.

Remarque.
Ce théorème ne donne pas la limite de la suite mais est utilisé pour prouver l'existence de la limite.

3.5. Suites extraites des termes d'indices pairs et impairs

Définition. Suites extraites des termes d'indices pairs et impairs

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

- On appelle **suite extraite des termes d'indices pairs** la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$.
- On appelle **suite extraite des termes d'indices impairs** la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème. Théorème des suites extraites

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Soit ℓ un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite ℓ si et seulement si les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ admettent pour limite ℓ.

Remarque.
Pour montrer qu'une suite est divergente, il suffit de déterminer une sous-suite divergente ou deux sous-suites qui convergent vers des limites différentes.

Théorème. Théorème des suites extraites d'indices pairs et impairs

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Soit ℓ un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.
Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite ℓ si et seulement si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ admettent pour limite ℓ.

Remarque.
Pour tout entier naturel n, le terme qui suit u_{2n} dans la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est $u_{2(n+1)} = u_{2n+2}$.
Pour tout entier naturel n, le terme qui suit u_{2n+1} dans la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est $u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3}$.

Exemple.

- La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui est bornée par -1 et 1, n'admet pas de limite.
  En effet, la suite des termes d'indices pairs est constante et prend la valeur 1 donc converge vers 1.
  La suite des termes d'indices impairs est constante et prend la valeur -1 donc converge vers -1.
  Comme les limites de deux suites extraites sont différentes, la suite diverge sans limite.
- La suite $(n(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui n'est pas bornée, n'admet pas de limite.
  En effet, la suite $(2n)_{n\in\mathbb{N}}$ des termes d'indices pairs tend vers $+\infty$.
  La suite $(-(2n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ des termes d'indices impairs tend vers $-\infty$.
  Comme les limites de deux suites extraites sont différentes, la suite diverge sans limite.

3.6. Croissances comparées

Théorème. Croissances comparées

Soient a et b deux réels tel que $a > 0$ et $b > 1$. Alors

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^a}{n!} = 0$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b^n}{n!} = 0$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^a}{b^n} = 0$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

Remarque.
Par ordre de prépondérance croissante on a ainsi :

- les suites puissances strictement positives ;
- les suites exponentielles de base $a > 1$;
- la suite factorielle ;
- la suite de terme général n^n.

4. Suites usuelles

4.1. Suites arithmétiques

Définition. Suite arithmétique

On appelle **suite arithmétique** de **raison** $r \in \mathbb{R}$ toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + r.$$

Une telle suite est entièrement déterminée par sa raison et par son premier terme (ou n'importe quel terme).

Exemple.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + 3$$

est l'unique suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 3.

Remarque.
Si $r = 0$, alors la suite est constante égale à son premier terme.

Méthode. Montrer qu'une suite est arithmétique

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique, on montre que pour tout entier naturel n, la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante, c'est-à-dire ne dépend pas de n.
Le réel ainsi trouvé est la raison de la suite arithmétique.

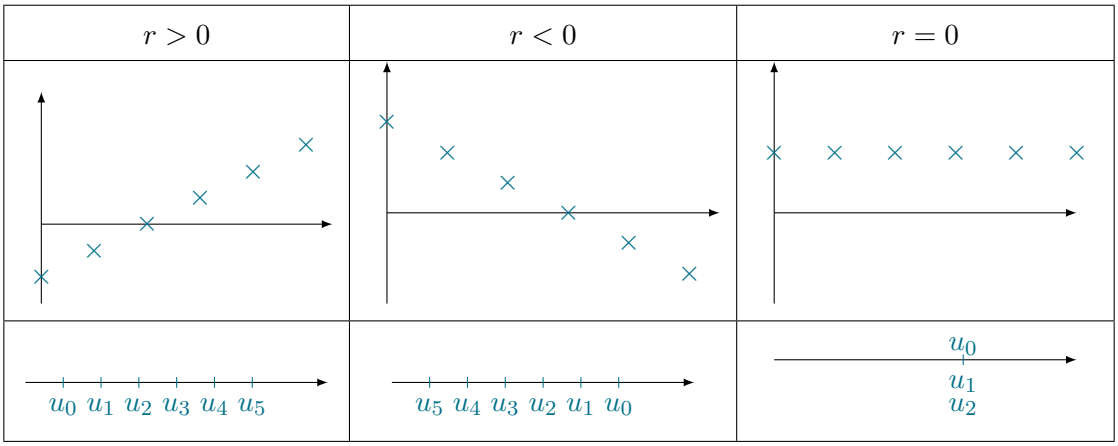
Proposition. Variations d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.

- Si la raison r est strictement positive, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
- Si la raison r est strictement négative, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
- Si la raison est nulle, alors la suite est constante égale à son premier terme.

Démonstration.

$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} - u_n = u_n + r - u_n = r.$



Remarque.
Toute suite arithmétique de raison strictement positive est minorée et non majorée.
Toute suite arithmétique de raison strictement négative est majorée et non minorée.

Proposition. Terme général d'une suite arithmétique

Le terme général d'une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison r est

$$u_n = u_0 + nr.$$

Démonstration.
C'est trivial par récurrence sur l'entier n.

1. Initialisation : $u_0 = u_0 + 0 \times r$.
2. Hérédité : soit n un entier naturel tel que $u_n = u_0 + nr$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + r && \text{par définition de la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= u_0 + nr + r && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= u_0 + (n+1)r. \end{aligned}$$

Plus généralement, on obtient facilement que pour tous entiers naturels $p \leqslant n$, $u_n = u_p + (n-p+1)r$.

Proposition. Somme de termes en progression arithmétique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$. Alors pour tout entier naturel n,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0+u_n}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall p \in [\![n, +\infty[\![, \qquad \sum_{k=p}^{n} u_k = \underbrace{(n-p+1)}_{\text{nombre de termes}} \frac{\overbrace{u_p}^{\text{premier terme}} + \overbrace{u_n}^{\text{dernier terme}}}{2}.$$

Démonstration.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}(u_0+kr) = \sum_{k=0}^{n} u_0 + r\sum_{k=0}^{n} k = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}r = (n+1)\frac{u_0+u_n}{2}.$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n-p} u_{p+k} = \sum_{k=0}^{n-p} u_p + kr = \sum_{k=0}^{n-p} u_p + r\sum_{k=0}^{n-p} k = (n-p+1)u_p + r\frac{(n-p)(n-p+1)}{2} \\ &= (n-p+1)\frac{2u_p+(n-p)r}{2} = (n-p+1)\frac{u_p+u_p+(n-p)r}{2} = (n-p+1)\frac{u_p+u_n}{2}\end{aligned}$$

Théorème.

Toute suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, qui dépend du signe de sa raison r.

- Si r est strictement positif, alors la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe et vaut $+\infty$.
- Si r est strictement négatif, alors la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe et vaut $-\infty$.
- Si r est nul, alors la suite est constante égale à son premier terme.

4.2. Suites géométriques

Définition. Suite géométrique

On appelle **suite géométrique** de **raison** $q \in \mathbb{R}$ toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = q\,u_n.$$

Une telle suite est entièrement déterminée par sa raison et par son premier terme (ou n'importe quel terme).

Exemple.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3u_n$$

est l'unique suite géométrique de premier terme 1 et de raison 3.

Remarque.

- Si $q = 1$, alors la suite est constante.
- Si $q = 0$, alors la suite est stationnaire : elle est nulle à partir du rang 1 (ou 0 si $u_0 = 0$).

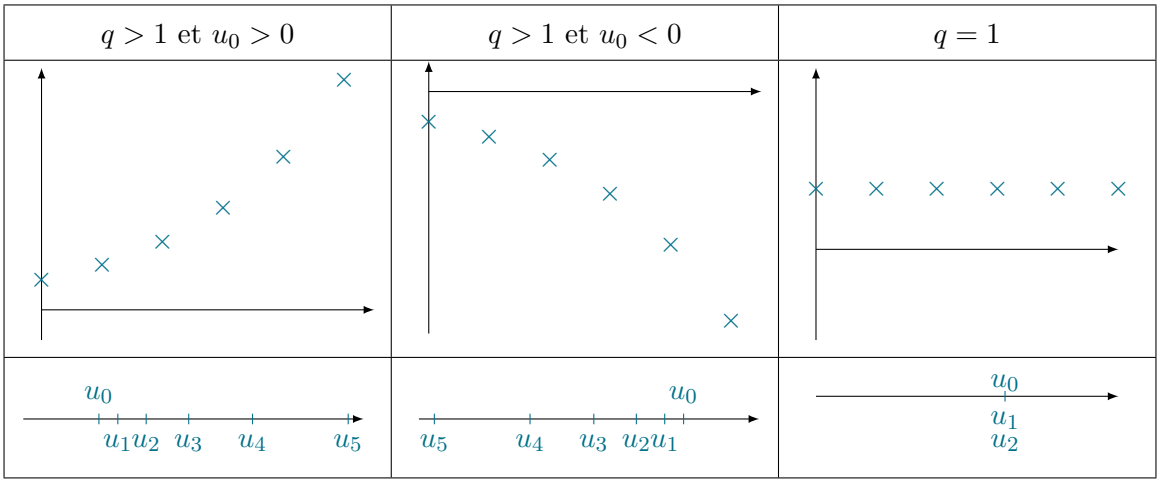
Méthode. Montrer qu'une suite est géométrique

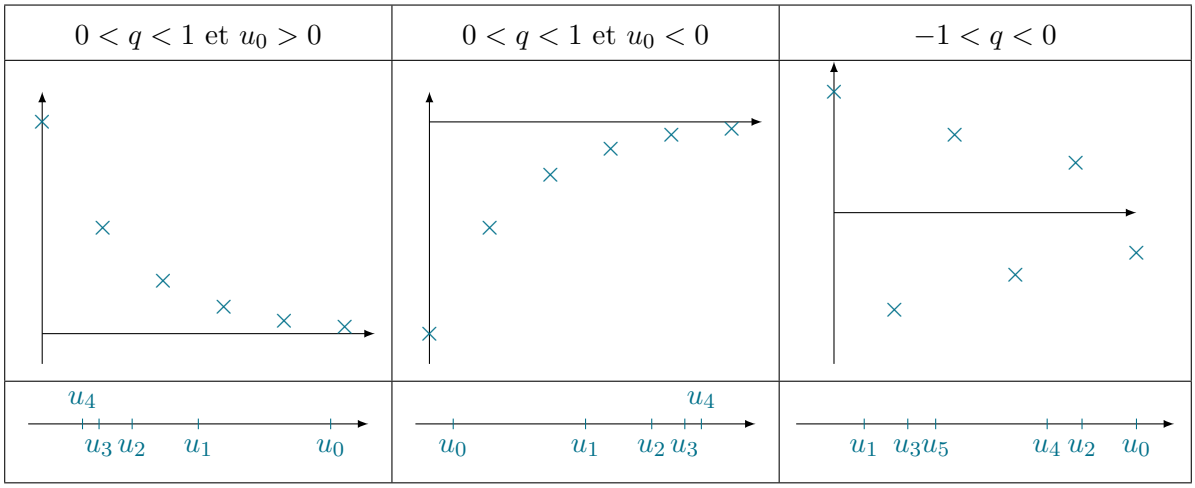
Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (dont tous les termes sont non nuls) est géométrique, on montre que pour tout entier naturel n, le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant, c'est-à-dire ne dépend pas de n. Le réel ainsi trouvé est la raison de la suite géométrique.

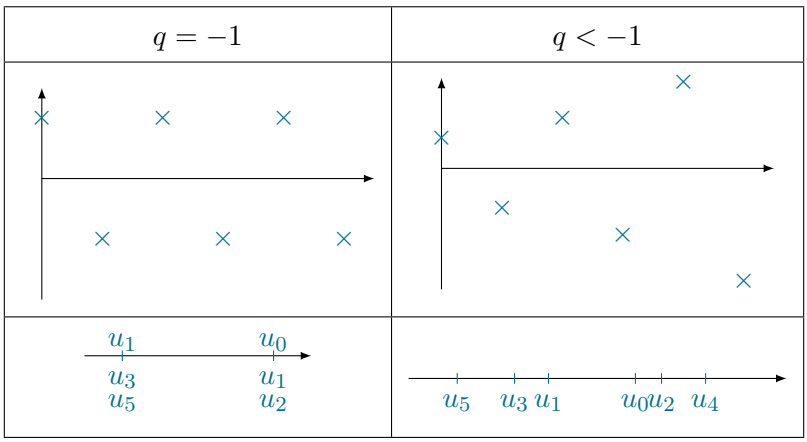
Proposition. Variations d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q.

1. Si $q > 1$,
   - si $u_0 > 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
   - si $u_0 < 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
2. Si $q = 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à son premier terme.
3. Si $0 < q < 1$,
   - si $u_0 > 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
   - si $u_0 < 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
4. Si $q = 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nulle et donc constante à partir du rang 1 (ou 0 si $u_0 = 0$).
5. Si $q < 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.







Remarque.
Une suite géométrique non nulle de raison $q \in \mathbb{R}$ est bornée si et seulement si $-1 \leqslant q \leqslant 1$.

Proposition. Terme général d'une suite géométrique

Le terme général d'une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison q est

$$u_n = q^n u_0.$$

Démonstration.
C'est trivial par récurrence sur l'entier n.

1. Initialisation : $u_0 = q^0 u_0$.
2. Hérédité : soit n un entier tel que $u_n = q^n u_0$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= q u_n && \text{par définition de la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= q\left(q^n u_0\right) && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= q^{n+1} u_0. \end{aligned}$$

Plus généralement, pour tous entiers naturels $p \leqslant n$, $u_n = q^{n-p} u_p$.

Théorème.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique non nulle de raison $q \in \mathbb{R}$.

- Si $|q| < 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, égale à 0.
- Si $q = 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à son premier terme.
- Si $q > 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, égale à $+\infty$ ou $-\infty$, selon le signe de u_0.
- Si $q \leqslant -1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

Remarque.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique non nulle de raison $q < -1$.
Alors la suite $\left(u_0 q^{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(u_0 \left(q^2\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q^2 > 1$ de premier terme u_0 donc tend vers $\begin{cases} +\infty & \text{si } u_0 > 0 \\ -\infty & \text{si } u_0 < 0 \end{cases}$
La suite $\left(u_0 q^{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(u_0 q \left(q^2\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q^2 > 1$ de premier terme $u_0 q$ de signe

opposé à u_0 donc tend vers $\begin{cases} +\infty & \text{si } u_0 < 0 \\ -\infty & \text{si } u_0 > 0 \end{cases}$
Comme les limites de deux suites extraites sont différentes, la suite diverge sans limite.

Rappelons la formule de la somme des puissances successives d'un réel.

Proposition. Somme des puissances entières successives d'un réel

Soit x un nombre réel (ou complexe). Pour tout entier naturel n, on a

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} & \text{si } x \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Démonstration.
Le cas où $x = 1$ est trivial. Si x est différent de 1, il suffit de développer

$$\begin{aligned} (1 - x)(1 + x + \cdots + x^n) &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \\ &\quad - x - x^2 - \cdots - x^n - x^{n+1} \\ &= 1 - x^{n+1}. \end{aligned}$$

Plus généralement, par la même démonstration, pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leqslant n$, on a

$$x^p + \cdots + x^n = \sum_{k=p}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{x^p - x^{n+1}}{1 - x} & \text{si } x \neq 1 \\ n - p + 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Cette proposition permet de calculer la somme de termes en progression géométrique.

Proposition. Somme de termes en progression géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite en progression géométrique de raison $q \neq 1$. Pour tous entiers naturels $p \leqslant n$,

$$u_p + \cdots + u_n = \sum_{k=p}^{n} u_k = u_0 \frac{q^p - q^{n+1}}{1 - q} = \underbrace{u_p}_{\text{premier terme}} \frac{1 - q^{\overbrace{n - p + 1}^{\text{nombre de termes}}}}{1 - q}.$$

4.3. Utilisation des résultats sur les suites arithmétiques et géométriques

Exemple.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{u_n + 2}$$

1. Montrons que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est défini et vérifie l'encadrement $-1 < u_n < 0$.
   On montre par récurrence sur n dans $\mathbb{N}^\star$: H_n « u_n est bien défini et que $-1 < u_n < 0$ ».
   - Initialisation : $u_1 = -\dfrac{1}{6} \in]-1, 0[$.
   - Hérédité : soit n dans $\mathbb{N}^\star$ tel que u_n est bien défini et $-1 < u_n < 0$.
     Alors u_{n+1} existe et on a

$$-1 < u_n < 0 \Leftrightarrow 1 < u_n + 2 < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{u_n + 2} < 1 \Leftrightarrow -1 < u_{n+1} = -\frac{1}{u_n + 2} < -\frac{1}{2} < 0$$

- Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et tous ses termes sont compris strictement entre -1 et 0.

2. On introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{1}{u_n + 1}.$$

Pour tout entier naturel n, $u_n + 1 \neq 0$ donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

3. Calculons les premiers termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On a $u_0 = 4$, $u_1 = \frac{1}{6}$, $u_2 = -\frac{6}{11}$, $u_3 = -\frac{11}{16}$. Donc $v_0 = \frac{1}{5}$, $v_1 = \frac{6}{5}$, $v_2 = \frac{11}{5}$ et $v_3 = \frac{16}{5}$.

4. On peut conjecturer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 1 et de premier terme $\frac{1}{5}$. Montrons-le.
Pour tout entier n on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1}+1} - \frac{1}{u_n+1} = \frac{1}{-\frac{1}{u_n+2}+1} - \frac{1}{u_n+1} = \frac{1}{\frac{u_n+2-1}{u_n+2}} - \frac{1}{u_n+1} \\ &= \frac{u_n+2}{u_n+1} - \frac{1}{u_n+1} = \frac{u_n+1}{u_n+1} = 1, \end{aligned}$$

ce qui prouve que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 1 et de premier terme $v_0 = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{5}$.
On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = \frac{1}{5} + n$$

5. On déduit de l'expression de v_n une expression de u_n.
Or pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{1}{u_n+1} \quad \Longleftrightarrow \quad u_n + 1 = \frac{1}{v_n} \quad \Longleftrightarrow \quad u_n = \frac{1}{v_n} - 1.$$

Pa conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{1}{\frac{1}{5}+n} - 1$$

6. Finalement on constate que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -1.

Chapitre 2

Équations de récurrence, Suites récurrentes

Dans ce chapitre, nous allons étudier les suites solutions d'une équation de récurrence ou équation aux différences finies.

1. Vocabulaire

En économie, le vocabulaire des différences finies est courant. On appelle différences finies :

- d'ordre 1 : $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$;
- d'ordre 2 : $\Delta^2 u_n = \Delta(\Delta u_n) = \Delta u_{n+1} - \Delta u_n$;
- ...
- d'ordre k : $\Delta u_n = \Delta^{k-1} u_{n+1} - \Delta^{k-1}$.

Une équation aux différences finies est une équation du type :

$$\Phi\left(n, u_n, \Delta u_n, \Delta^2 u_n, \dots \Delta^p u_n\right) = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cependant toute équation aux différences finies peut également s'écrire sous la forme suivante :

$$\Psi\left(n, u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+p}\right) = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Quand on isole le terme de la suite d'indice le plus grand, on parle d'équation de récurrence :

$$u_{n+p} = f\left(n, u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+p-1}\right) = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Les suites solutions de ce type d'équations sont alors appelées *suites récurrentes*.

Définition. Suites récurrentes d'ordre p

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite récurrente** d'ordre $p \in \mathbb{N}^\star$ s'il existe une fonction f telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+p} = f\left(u_{n+p-1}, u_{n+p-2}, \dots, u_n, n\right)$$

L'**ordre** d'une suite récurrente linéaire est la profondeur de la relation de récurrence : c'est le nombre de termes précédents dont on a besoin pour calculer un terme.

Définition.

Une équation de récurrence est dite **autonome** si la fonction f ne fait intervenir que des termes de la suite et pas la variable n seule :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+p} = f\left(u_{n+p-1}, u_{n+p-2}, \dots, u_n\right)$$

Dans une équation autonome, la règle f permettant de calculer le nouveau terme u_{n+p} ne dépend que des p valeurs précédentes et pas du rang n.
Un cas important de suite récurente est

Définition. Suites récurrentes linéaires d'ordre p à coefficients constants

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite récurrente linéaire à coefficients constants** d'ordre $p \in \mathbb{N}^\star$ s'il existe des réels $a_0, \dots, a_{p-1}$ et une fonction φ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots + a_{p-1} u_{n+p-1} + \varphi(n).$$

$\varphi(n)$ est appelé second membre.
Si le second membre $\varphi(n)$ est identiquement nul on dit que l'équation de récurence linéaire est **homogène**.

Par la suite, nous allons nous intéresser aux suites récurrentes réelles d'ordre 1, puis non linéaire autonome, puis enfin aux suites vectorielles linéaires d'ordres quelconques.

2. Équations de récurrence linéaires du premier ordre à coefficients constants

2.1. Généralités

Définition.

On appelle **équation de récurrence linéaire du premier ordre à coefficients constants** une relation de la forme suivante

$$y_{t+1} = a y_t + \varphi(t), \ \forall t \in \mathbb{N} \tag{E}$$

ou

$$u_{n+1} = a u_n + \varphi(n), \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{E}$$

avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ des suites réelles, $a \in \mathbb{R}^*$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Parfois on note l'équation de récurrence : $u_{n+1} - a u_n = \varphi(n), \ \forall n \in \mathbb{N}$ d'où l'appellation **second membre** pour le terme $\varphi(n)$.

On exclut le cas où $a = 0$ car alors l'équation revient à $u_{n+1} = \varphi(n)$ et la suite est définie de façon explicite (en dehors du premier terme qui doit être spécifié à part).

Définition.

On appelle **solution générale** de (E) l'ensemble des suites vérifiant la relation de récurrence (E).

Définition.

On appelle **suite récurrente linéaire du premier ordre à coefficients constants** une suite vérifiant une équation de récurrence linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Cas où $\varphi(n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

L'équation devient $u_{n+1} = a u_n$. Les solutions sont les suites géométriques de raison a.

Cas où $a = 1$ et $\varphi(n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

L'équation devient $u_{n+1} = u_n$. Les solutions sont les suites constantes.

Cas où $a = 1$ et $\varphi(n) = b$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Les solutions sont les suites arithmétiques de raison b.

Cas où $\varphi(n) = b$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

L'équation devient $u_{n+1} = au_n + b$. Les solutions sont appelées suites arithmético-géométriques.

Exemple.

1. Compte épargne : $u_0 = 100$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = (1+t)u_n + 10$ avec t le taux de rémunération du compte et 10 le montant du dépôt supplémentaire à chaque période ;
2. Évolution de capital : $K_{n+1} = (1-\delta)K_n + I_n$ avec $0 < \delta < 1$ le taux de dépréciation et I l'investissement (qui peut varier) à chaque période.

2.2. Solution d'une équation de récurrence linéaire d'ordre 1

Proposition.

Pour tout réel u_0, il existe une unique suite solution vérifiant (E) et de premier terme u_0.

Démonstration.
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites vérifiant (E) et de premier terme u_0.
Montrons par récurrence que ces deux suites sont identiques. Pour tout entier naturel n, on pose H_n : « $u_n = v_n$ ».

- *Initialisation.* Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $v_0 = u_0$.
  Donc H_0 ets vraie.
- *Hérédité.* Supposons que H_n soit vraie pour un n fixé. montrons que H_{n+1} est vraie également. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie l'équation (E), on a $u_{n+1} = au_n + \varphi(n)$. Or on a supposé que H_n était vraie, c'est-à-dire $u_n = v_n$ donc $u_{n+1} = av_n + \varphi(n)$. Cependant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie également (E) donc $v_{n+1} = av_n + \varphi(n)$.
  Donc $u_{n+1} = v_{n+1}$, c'est-à-dire H_{n+1} est vraie.
- *Conclusion.* Par principe de récurrence, H_n est vraie pour tout entier naturel n. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = v_n$. Les deux suites sont donc identiques.

Par conséquent, il y a unicité de la suite solution vérifiant (E) et de premier terme u_0.

Théorème. Solutions d'une équation de récurrence linéaire du premier ordre

Soit $(u_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ une solution de l'équation de récurrence $u_{n+1} - au_n = \varphi(n)$.
Alors l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $u_{n+1} - au_n = \varphi(n)$ est

$$\mathcal{S} = \left\{u^p + u^h, u^h \in \mathcal{S}_H\right\},$$

où $\mathcal{S}_H$ désigne l'ensemble des solutions de l'équation de récurrence linéaire homogène $u_{n+1} - au_n = 0$ associée à l'équation de récurrence $u_{n+1} - au_n = \varphi(n)$.

Démonstration.

- Dans le sens direct, la suite u^p est solution de l'équation de récurrence $u_{n+1} - au_n = \varphi(n)$ donc

  $$u_{n+1}^p - au_n^p = \varphi(n)$$

  et la suite u^h est solution de l'équation homogène associée $u_{n+1} - au_n = 0$ donc

  $$u_{n+1}^h - au_n^h = 0$$

On constate aisément que la suite $\left(u_n^p + u_n^h\right)_{n\in_N}$ est solution de l'équation de récurrence $u_{n+1} - au_n = \varphi(n)$ car

$$u_{n+1}^p + u_{n+1}^h - a\left(u_n^p + u_n^h\right) = u_{n+1}^p - au_n^p + u_{n+1}^h - au_n^h = \varphi(n) + 0 = \varphi(n)$$

- Réciproquement, si une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de l'équation de récurrence $u_{n+1} - au_n = \varphi(n)$, alors

$$v_{n+1} - av_n = \varphi(n)$$

et donc $v - u^p$ est une solution de l'équation de récurrence homogène $u_{n+1} - au_n = 0$. En effet, on a

$$v_{n+1} - u_{n+1}^p - a\left(v_n - u_n^p\right) = v_{n+1} - av_n - \left(u_{n+1}^p - au_n^p\right) = \varphi(n) - \varphi(n) = 0$$

Finalement, v s'écrit bien sous la forme $v = u^p + \underbrace{(v - u^p)}_{\in\mathcal{S}_H}$.

Cette démonstration ne dépend pas de l'ordre de l'équation de récurrence, mais seulement de sa linéarité.

Remarque.
Si v^p est une autre solution de l'équation de récurrence $u_{n+1} - au_n = \varphi(n)$, alors $\left\{u^p + u^h, u^h \in \mathcal{S}_H\right\} = \left\{v^p + u^h, u^h \in \mathcal{S}_H\right\}$.

2.3. Solution de l'équation de récurrence homogène associée

Proposition. Structure de l'ensemble des solutions homogènes

L'ensemble des solutions de l'équation de récurrence linéaire homogène $u_{n+1} - au_n = 0$ contient la suite identiquement nulle et est stable par combinaison linéaire.
Par conséquent, l'ensemble des solutions d'une équation de récurrence linéaire homogène d'ordre un est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

Démonstration.

- La suite identiquement nulle est clairement solution de l'équation de récurrence $u_{n+1} - au_n = 0$.
- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $f\,(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux solutions de l'équation de récurrence $u_{n+1} - au_n = 0$.
  Alors ces suites vérifient $u_{n+1} - au_n = 0$ et $v_{n+1} - av_n = 0$, pour tous entiers naturels n.
  Soit λ un élément de $\mathbb{R}$.
  Alors on a

$$\begin{aligned}(\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) - a(\lambda u_n + v_n) &= \lambda u_{n+1} + v_{n+1} - a\lambda u_n - av_n \\ &= \lambda\left(u_{n+1} - au_n\right) + v_{n+1} - av_n \\ &= \lambda 0 + 0 \\ &= 0,\end{aligned}$$

  ce qui prouve que la suite $(\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de l'équation de récurrence $u_{n+1} - au_n = 0$.

Donc l'ensemble des solutions d'une équation de récurrence linéaire homogène d'ordre un est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

Remarque.
Cette démonstration ne dépend pas de l'ordre de l'équation de récurrence, mais seulement de sa linéarité.

Remarque.
En fait comme a est supposé non nul, l'ensemble des solutions de l'équation de récurrence $u_{n+1} - au_n = 0$ est un espace vectoriel de dimension 1.

Théorème. Solutions d'une équation de récurrence linéaire homogène

L'ensemble des solutions de l'équation de récurrence linéaire homogène $u_{n+1} - au_n = 0$ est l'ensemble des suites géométriques de raison a :

$$\mathcal{S}_H := \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R}, \\ n & \mapsto & \lambda a^n \end{array} , \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.4. Recherche de solution particulière

Cas particulier d'un second membre constant

Quand le second membre est constant égal à un réel b non nul, l'équation de récurrence s'écrit :

$$u_{n+1} = au_n + b, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Le cas où $a = 1$ et $\varphi(n) = b$ a déjà été étudié. L'ensemble de des solutions est l'ensemble des suites arithmétiques de raison b.

Supposons maintenant qu'en plus d'être différent de 0, a est différent de 1. Alors les suites solutions sont appelées : suites arithmético-géométriques.

On remarque aisément que la suite $(u_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ constante égale à $\dfrac{b}{1-a}$ vérifie l'équation de récurrence et est donc une solution (particulière) de l'équation de récurrence.

Proposition. Terme général d'une suite arithmético-géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$, avec $a \neq 1$. Pour tout entier n positif ou nul, on a

$$u_n = a^n (u_0 - \ell) + \ell = a^{n-1} (u_1 - \ell) + \ell, \quad \text{avec } \ell = \frac{b}{1-a}.$$

Démonstration.
Toute suite solution de l'équation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ peut s'écrire comme la somme d'une suite solution particulière et d'une suite solution de l'équation de récurrence homogène associée.
Or l'ensemble des suites solutions de l'équation homogène associée, $u_{n+1} = au_n$ pour tout entier n, sont les suites géométriques de raison a.
De plus, la suite constante égale à $\dfrac{b}{1-a}$ est une solution de l'équation de récurrence.
Donc si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie l'équation de récurrence, il existe un réel λ tel que pour tout entier naturel n, on a $u_n = \lambda a^n + \dfrac{b}{1-a}$.
On a donc $u_0 = \lambda + \dfrac{b}{1-a}$ d'où $\lambda = u_0 - \dfrac{b}{1-a}$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $u_{n+1} = au_n + b$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}$$

Exemple.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 8$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 2u_{n+1} = -u_n + 9$.
L'équation de récurrence peut s'écrire $u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{9}{2}$.
Commençons par chercher une solution (particulière) constante, c'est-à-dire cherchons ℓ tel que $2\ell = -\ell + 9$,.

Alors on a $3\ell = 9$ et $\ell = 3$.
Donc, comme pour tout entier naturel n, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - 3) + 3 = 5\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 3.$$

Autre forme de second membre

De façon générale, de la même façon que l'on a cherché un solution particulière constante quand le second membre était constant, on cherchera une solution de la même forme que le second membre. Sauf si un terme du second membre apparaît dans la forme des solutions de l'équation de récurrence homogène associée.

Proposition.

Si $\varphi(n) = P(n)$ où P est un polynôme, il existe une solution (particulière) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'équation de récurrence $u_{n+1} = au_n + \varphi(n)$, pour tout entier n, de la forme :

- $v_n = Q(n)$, pour tout entier n, si $a \neq 1$;
- $v_n = nQ(n)$, pour tout entier n si $a = 1$;

où Q un polynôme de même degré que P.

Remarque.
Le cas particulier précédent d'un second membre constant est contenu dans ce résultat avec P un polynôme de degré 0.

Exemple.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + n$.
Les solutions de l'équation de récurrence homogène associée sont les suites géométriques de raison 2.
Comme $a = 2 \neq 1$, il existe une solution particulière de la forme d'un polynôme de degré 1, c'est-à-dire $v_n = \alpha n + \beta$, pour tout entier naturel n.
$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie l'équation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + n \iff v_{n+1} = 2v_n + n,\ \forall n \in \mathbb{N}$
$\iff \alpha(n+1) + \beta = 2(\alpha n + \beta) + n,\ \forall n \in \mathbb{N}$
$\iff (\alpha + 1)n = \alpha - \beta,\ \forall n \in \mathbb{N}$
Or cela n'est possible que si $\alpha + 1 = 0$ et $\alpha - \beta = 0$, d'où $\alpha = \beta = -1$.
Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = -n - 1$, pour tout entier naturel n, est une solution (particulière) de l'équation de récurrence.
Donc l'ensemble des solutions de l'équation de récurrence est l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme $u_n = \lambda 2^n - n - 1$, pour tout entier naturel n, avec λ un réel.
Pour trouver la solution vérifiant en plus la condition initiale $u_0 = 0$, il suffit d'exprimer la forme générale au rang 0.
$u_0 = 0 = \lambda 2^0 - 0 - 1 \iff \lambda - 1 = 0 \iff \lambda = 1$
Ainsi l'unique suite vérifiant la relation de récurrence et telle que $u_0 = 0$ est la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = 2^n - n - 1$, pour tout entier naturel n.

Exemple.
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant l'équation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + n$.
Les solutions de l'équation de récurrence homogène associée sont toujours les suites géométriques de raison 1, c'est-à-dire les suites constantes.
Mais cette fois $a = 1$, donc on cherchera une solution particulière de la forme $v_n = n(\alpha n + \beta) = \alpha n^2 + \beta n$, pour tout entier naturel n.
$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie l'équation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + n \iff v_{n+1} = v_n + n,\ \forall n \in \mathbb{N}$
$\iff \alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) = \left(\alpha n^2 + \beta n\right) + n,\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\iff \alpha n^2 + 2\alpha n + \alpha + \beta n + \beta = \alpha n^2 + \beta n + n \ \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\iff (2\alpha - 1)n + \alpha + \beta = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Or cela n'est possible que si $2\alpha - 1 = 0$ et $\alpha + \beta = 0$, d'où $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = -\frac{1}{2}$.

Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = \frac{1}{2}n(n-1)$, pour tout entier naturel n, est une solution (particulière) de l'équation de récurrence.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation de récurrence est l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme $u_n = \lambda + \frac{1}{2}n(n-1)$, pour tout entier naturel n, avec λ un réel.

Proposition.

Si $\varphi(n) = k^n$ où k est un réel non nul, il existe une solution (particulière) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'équation de récurrence $u_{n+1} = au_n + \varphi(n)$, pour tout entier n, de la forme :

- $v_n = \alpha k^n$, pour tout entier n, si $k \neq a$;
- $v_n = n\alpha k^n$, pour tout entier n si $k = a$.

Exemple.

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant l'équation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + e^n$.

Les solutions de l'équation de récurrence homogène associée sont toujours les suites géométriques de raison $-\frac{1}{2}$.

Comme $e \neq a = -\frac{1}{2}$ donc on cherchera une solution particulière de la forme $v_n = n\alpha e^n$, pour tout entier naturel n.

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie l'équation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + e^n \iff v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n + e^n, \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\iff \alpha e^{n+1} = -\frac{1}{2}\alpha e^n + e^n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\iff \alpha e^1 = -\frac{1}{2}\alpha + 1 \iff \alpha\left(e + \frac{1}{2}\right) = 1$$
$$\iff \alpha = \frac{2}{2e+1}$$

Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = \frac{2}{2e+1}e^n$, pour tout entier naturel n, est une solution (particulière) de l'équation de récurrence.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation de récurrence est l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme $u_n = \lambda\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{2e+1}e^n$, pour tout entier naturel n, avec λ un réel.

Proposition.

Si $\varphi(n) = A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)$ où A et B sont deux réels non tous les deux nuls, il existe une solution (particulière) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'équation de récurrence $u_{n+1} = au_n + \varphi(n)$, pour tout entier n, de la forme :

$$v_n = \alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta), \text{ pour tout entier } n.$$

Exemple.

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant l'équation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = 2u_n + \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

Les solutions de l'équation de récurrence homogène associée sont toujours les suites géométriques de raison 2.

On cherche une solution particulière de la forme $v_n = \alpha \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \beta \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$, pour tout entier naturel n.

Les calculs sont assez laborieux et font appel à des formules de trigonométrie. Une autre façon de s'y prendre est de considérer l'équation de récurrence $u_{n+1} = 2u_n + e^{in\frac{\pi}{2}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ dont les solutions sont des suites à valeurs dans $\mathbb{C}$. Et la partie réelle d'une solution particulière sera une solution particulière de l'équation de récurrence initiale.

Principe de superposition

Proposition. Principe de superposition

Soient a un réel non nul, φ_1 et φ_2 deux fonctions réelles définies sur $\mathbb{N}$.
Soit v une solution de l'équation de récurrence $(E_1) : u_{n+1} - au_n = \varphi_1(n)$.
Soit w une solution de l'équation de récurrence $(E_2) : u_{n+1} - au_n = \varphi_2(n)$.
Alors, pour tout réel λ, la suite $\lambda v + w$ est solution de l'équation de récurrence $(E) : u_{n+1} - au_n = \lambda\varphi_1(n) + \varphi_2(n)$.

Démonstration.
Pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} - av_n = \varphi_1(n)$ et $w_{n+1} - aw_n = \varphi_2(n)$.
En additionnant membre à membre les deux relations précédentes, on obtient

$$\lambda v_{n+1} + w_{n+1} + \lambda a v_n + a w_n 2 = \lambda\varphi_1(n) + \varphi_2(n),$$

c'est-à-dire

$$(\lambda v_{n+1} + w_{n+1}) + a\,(\lambda v_n + w_n) = \lambda\varphi_1(n) + \varphi_2(n),$$

Finalement, la suite $\lambda v + w$ est solution de l'équation de récurrence $(E) : u_{n+1} - au_n = \lambda\varphi_1(n) + \varphi_2(n)$.

Cette démonstration ne dépend pas de l'ordre de l'équation différentielle, mais seulement de sa linéarité.

Exemple.
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant l'équation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + e^n + \frac{9}{2}$.
On a déjà vu dans des exemples précédents que :

- la suite constante égale à 3 est une solution de l'équation de récurrence $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + \frac{9}{2},\ \forall n \in \mathbb{N}$;
- et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = \frac{2}{2e+1}e^n$, pour tout entier naturel n est une solution de l'équation de récurrence $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + e^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Donc d'après le principe de récurrence la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $w_n = 3 + \frac{2}{2e+1}e^n$ est une solution de l'équation de récurrence initiale.

2.5. Équilibre et limites

Définition.

Un **point d'équilibre** ou une valeur stationnaire d'une équation aux différences finies est une valeur de u_0 pour laquelle le système est stationnaire, c'est-à-dire $u_{n+1} = u_n$, pour tout entier positif n.

Cas d'un second membre constant non nul

Si $a = 1$, il n'y a pas de situation d'équilibre possible. Les suites vérifiant la relation de récurrence sont des suites arithmétiques de raison non nulle.

Si $a \neq 1$, les suites solutions sont les suites dites arithmético-géométriques et il existe un unique point d'équilibre : $\ell = \dfrac{a}{1-b}$.

Remarque.
On pose f la fonction $x \mapsto ax + b$. Alors le point d'équilibre est un point fixe de la fonction f, c'est-à-dire $f(x) = x$.

Proposition.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$, avec $a \neq 1$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $|a| < 1$.
Si elle converge, alors sa limite est $\ell = \dfrac{a}{1-b}$.

Démonstration.
Le terme général de telles suites est de la forme $u_n = a^n (u_0 - \ell) + \ell$, pour tout entier naturel n.
La nature de la suite dépend donc uniquement de la nature de la suite de terme général a^n.

- Si $|a| < 1$, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$.
- Si $a > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.
- Si $a \leqslant -1$, la suite n'admet pas de limite car les limites de la sous-suite de rang pair et de celle de rang impair sont différentes.

Bien que la convergence soit garantie dès que $|a| < 1$, le *chemin* que prend la suite vers sa limite diffère selon la valeur de a.

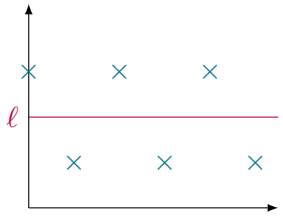
Les différents comportements des suites arithmético-géométriques

Cas particuliers

Cas $a = 1$:
divergence régulière



Cas $a = -1$:
divergence oscillatoire,
oscillations entretenues

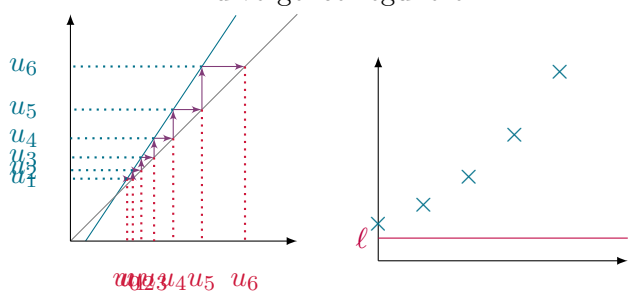


Cas généraux

Si $|a| > 1$, alors (u_n) diverge.

• $a > 1$ et $u_0 > \ell$:

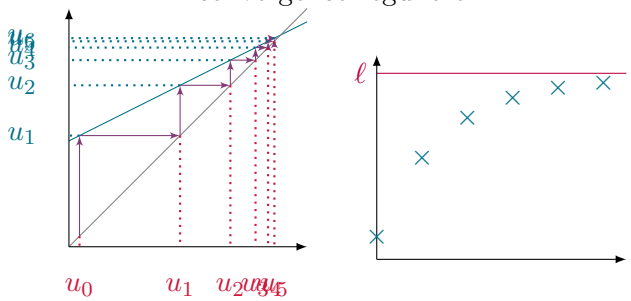
divergence régulière



Si $|a| < 1$, alors (u_n) converge vers $l = \dfrac{b}{1-a}$.

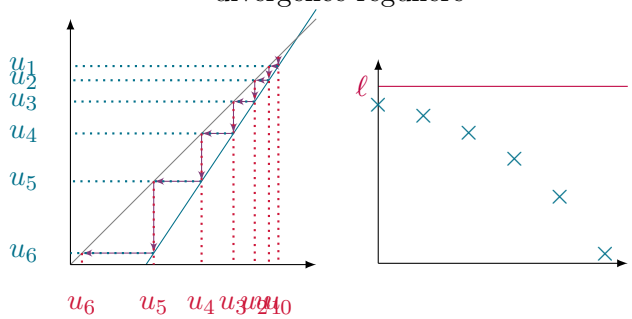
• $0 < a < 1$ et $u_0 < \ell$:

convergence régulière



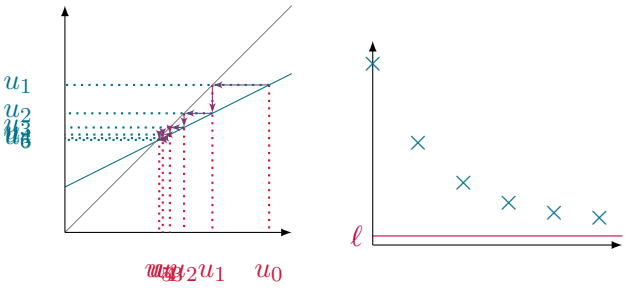
• $a > 1$ et $u_0 < \ell$:

divergence régulière



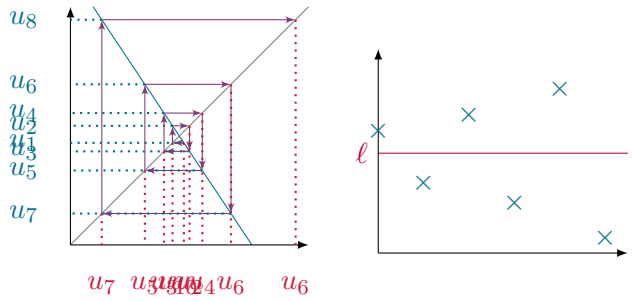
• $0 < a < 1$ et $u_0 > \ell$:

convergence régulière



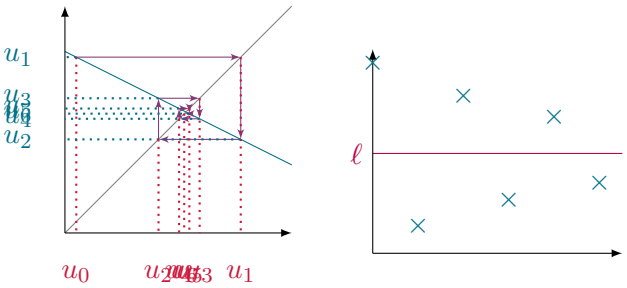
• $a < -1$:

divergence oscillatoire, oscillations explosives



• $-1 < a < 0$:

convergence oscillatoire, oscillations amorties



Cas d'un second membre non constant

On considère l'équation de récurrence de la forme $u_{n+1} = au_n + \varphi(n)$, pour tout entier naturel n, avec $\varphi(n)$ non constant. Alors les suites vérifiant cette relation ont leur terme général de la forme : $u_n = \lambda a^n + v_n$ avec $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une solution particulière de l'équation de récurrence et λ un réel.

Proposition. Condition suffisante de convergence

Si $|a| < 1$ et que la solution particulière $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors l'ensemble des suites vérifiant l'équation de récurrence sont convergente.

Exemple.

Considérons à nouveau les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant l'équation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n + e^n$.

On a déjà vu que l'ensemble des solutions de l'équation de récurrence est l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme $u_n = \lambda\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{2}{2e+1}e^n$, pour tout entier naturel n, avec λ un réel.

On a $a = -\dfrac{1}{2}$ donc $|a| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation de récurrence sont divergentes, et plus précisément tendent vers $+\infty$ en $+\infty$.

3. Équations de récurrence du premier ordre non linéaires

Les équations de récurrence non linéaires ne peuvent pas être résolues explicitement en général. Cependant il est possible d'obtenir des informations qualitatives, par exemple la nature de la suite, et sa monotonie.

3.1. Introduction

Définition.

On appelle équation de récurrence non linéaire d'ordre un toute équation de la forme

$$y_{t+1} = f(y_t, t), \ \forall t \in \mathbb{N}$$

ou

$$u_{n+1} = f(u_n, n), \ \forall n \in \mathbb{N},$$

avec $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$.

Cependant on ne considérera que des équations dans lesquelles f ne dépende pas explicitement de n, c'est-à-dire

$$y_{t+1} = f(y_t), \ \forall t \in \mathbb{N}$$

ou

$$u_{n+1} = f(u_n), \ \forall n \in \mathbb{N},$$

Remarque.
Nous ne considérons également que des fonctions f continues sur I.

3.2. Existence de la suite

En général, il est impossible de justifier l'existence de tous les termes des suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

Définition.

Soit f une fonction telle que $f : D \to \mathbb{R}$ avec $D \subset \mathbb{R}$.

On dit qu'un intervalle $I \subset D$ est **stable** par f si et seulement si

$$f(I) \subset I.$$

Proposition.

Si l'intervalle I est stable par f et si le premier terme u_0 appartient à l'intervalle I, alors pour tout entier naturel n, le terme u_n existe et appartient à I.

Démonstration.
Posons, pour tout entier naturel n, l'hypothèse de récurrence

$$H_n : \text{« } u_n \text{ existe et } u_n \text{ appartient à } I \text{ »}$$

- Initialisation. H_0 est trivialement vraie.
- Hérédité. Soit n un entier naturel tel que H_n est vraie.
  Alors u_n existe et appartient à I.
  Donc $f(u_n)$ existe et, par stabilité de I par f, $f(u_n)$ appartient à I.
  Or $f(u_n) = u_{n+1}$ donc H_{n+1} est vraie.

- Conclusion. Pour tout entier naturel n, H_n est vraie.

Exemple.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
Si $\alpha > 0$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+$ par exemple sont des intervalles stables, mais également $[0;1]$ et $[1;+\infty[$.
Si $\alpha < 0$, l'intervalle $]0,+\infty[$ est stable, mais aussi $]-\infty;0[$ quand α est un entier impair.

3.3. Limites et points fixes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n),$$

où f est une fonction continue sur un intervalle I qui est stable par f et qui contient u_0, ce qui prouve que la suite est bien définie et que tous les termes appartiennent à l'intervalle I.
Que peut-on dire de son comportement asymptotique ? des valeurs possibles de sa potentielle limite ?

Définition.

Soit f une fonction telle que $f : D \to \mathbb{R}$ avec $D \subset \mathbb{R}$.

On dit qu'un réel x de D est un **point fixe** de la fonction f si et seulement si

$$f(x) = x.$$

Théorème.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \in I \end{cases},$$

où la fonction f est continue sur un intervalle I, stable par f.
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors elle converge vers un point fixe de la fonction f.

Démonstration.
On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ce même réel ℓ.
Comme la fonction f est continue au point ℓ, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel $f(\ell)$.
En passant à la limite en $+\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient

$$\ell = f(\ell).$$

Remarque.

- La fonction f peut posséder aucun, un ou plusieurs points fixes.
- Quel que soit le nombre de points fixes, la suite peut être divergente.

Exemple.
Revenons à l'exemple.

$$u_{n+1} = u_n^\alpha, \quad \alpha > 0, \ n \in \mathbb{N}.$$

Recherche d'un état d'équilibre : $\ell = \ell^\alpha \Leftrightarrow \ell(\ell^{\alpha-1} - 1) = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell = 1$.
Si à un moment la suite prend la valeur 0 ou la valeur 1 alors elle prend cette valeur définitivement.
Mais si $u_0 \neq 0$ et $u_0 \neq 1$, est-ce que la suite converge vers une de ces valeurs et si oui laquelle ?

3.4. Étude du comportement de la suite quand f est monotone

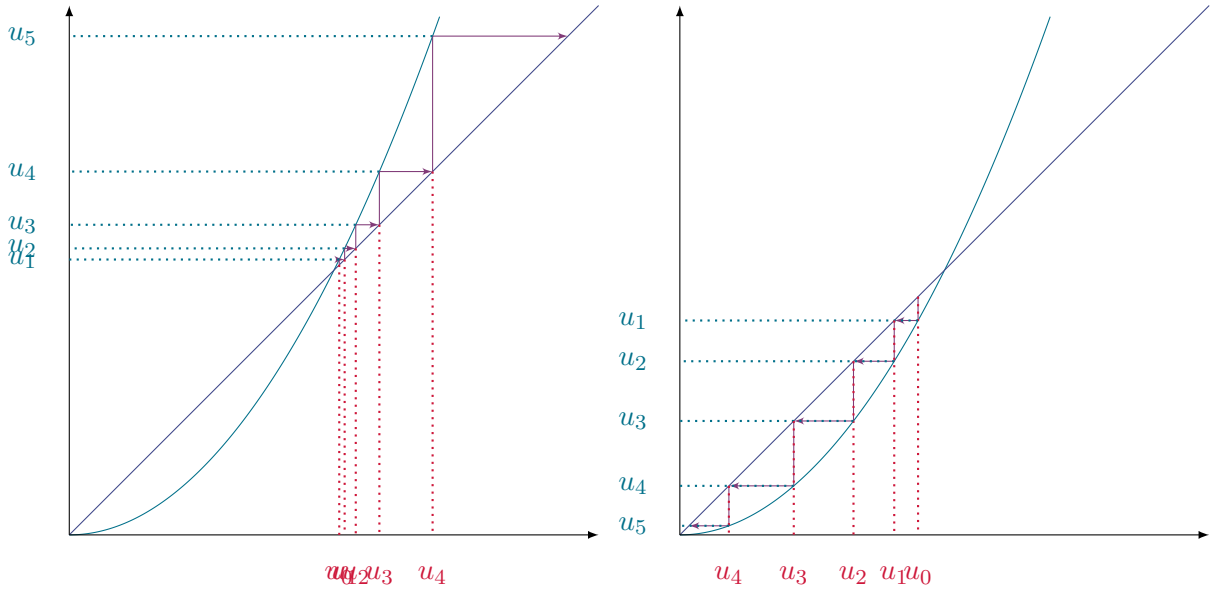
Considérons à nouveau les suites définies par

$$u_{n+1} = u_n^\alpha, \ n \in \mathbb{N}.$$

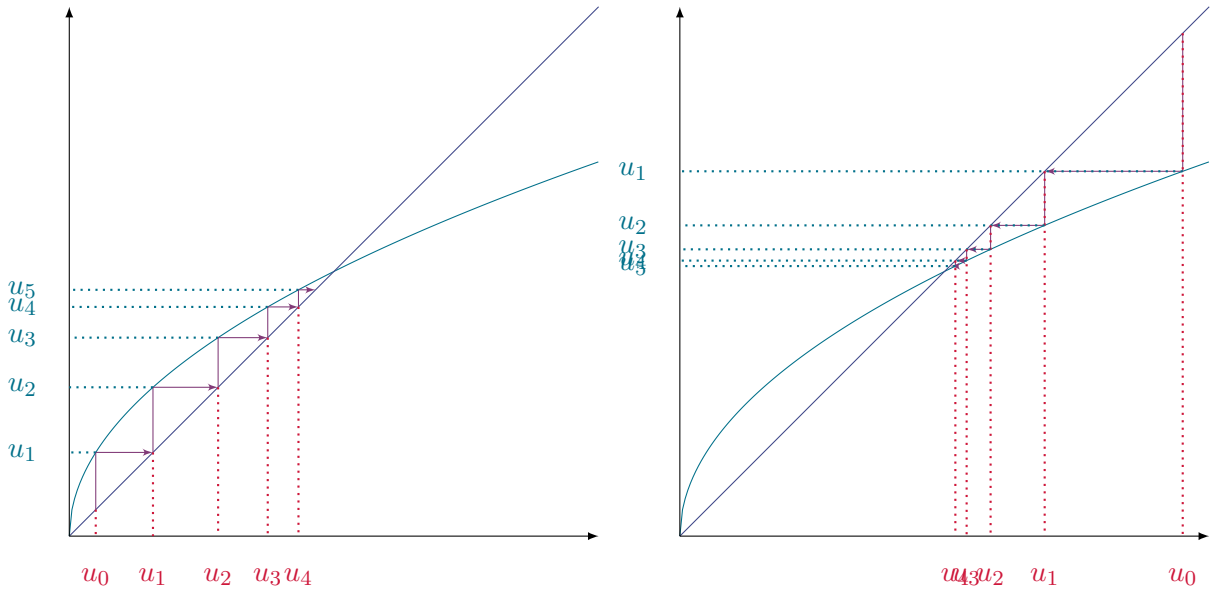
Cas où f est croissante

Pour notre exemple, cela correspond à $\alpha > 0$.
Observons quelques exemples.

Cas où $\alpha = 2$ ($\alpha > 1$).



Cas où $\alpha = \dfrac{1}{2}$ ($0 < \alpha < 1$).



Comment peut-on rigoureusement, sans se reposer uniquement sur une représentation graphique, affirmer des convergences ou divergences ?

Théorème. Théorème de la limite monotone

Toute suite réelle monotone admet une limite (finie ou infinie).

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante.
   - Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par un réel M, alors elle converge vers un réel $\ell \leqslant M$.
   - Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante.
   - Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par un réel m, alors elle converge vers un réel $\ell \geqslant m$.
   - Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée, alors elle diverge vers $-\infty$.

Remarque.
Soient f une fonction croissante sur l'intervalle I, stable par f et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout entier naturel n. Alors

1. si $u_0 \leqslant u_1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;
2. si $u_0 \geqslant u_1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Cela se démontrer aisément par récurrence.
Démonstration.

1. Posons, pour tout entier naturel n

$$H_n : u_n \leqslant u_{n+1}$$

   - Initialisation. H_0 est trivialement vraie car $u_0 \leqslant u_1$.
   - Hérédité. Soit n un entier naturel tel que H_n est vraie donc $u_n \leqslant u_{n+1}$.
     Or la fonction f est croissante sur I et u_n ainsi que u_{n+1} appartiennent à I donc

$$u_n \leqslant u_{n+1} \quad \Longrightarrow \quad f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \quad \Longleftrightarrow \quad u_{n+1} \leqslant u_{n+2},$$

     ce qui montre que H_{n+1} est vraie.
   - Conclusion. Par conséquent, pour tout entier naturel n, H_n est vraie et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2. Posons, pour tout entier naturel n

$$H_n : u_n \geqslant u_{n+1}$$

   - Initialisation. H_0 est trivialement vraie car $u_0 \geqslant u_1$.
   - Hérédité. Soit n un entier naturel tel que H_n est vraie donc $u_n \geqslant u_{n+1}$.
     Or la fonction f est croissante sur I et u_n ainsi que u_{n+1} appartiennent à I donc

$$u_n \geqslant u_{n+1} \quad \Longrightarrow \quad f(u_n) \geqslant f(u_{n+1}) \quad \Longleftrightarrow \quad u_{n+1} \geqslant u_{n+2},$$

     ce qui montre que H_{n+1} est vraie.
   - Conclusion. Par conséquent, pour tout entier naturel n, H_n est vraie et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Méthode.

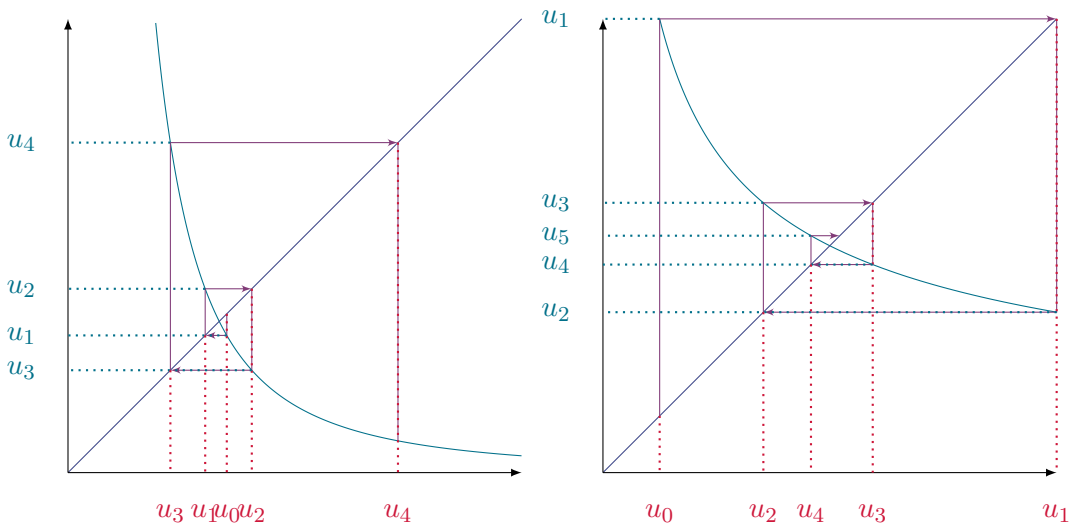
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par un réel M, alors elle converge vers un point fixe ℓ de f tel que $\ell \leqslant M$.
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par un réel m, alors elle converge vers un point fixe ℓ de f tel que $\ell \geqslant m$.
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et ne *semble* pas majorée, on peut raisonner par l'absurde en supposant que la suite converge vers un réel ℓ et on essaie de trouver une contradiction concernant ℓ. Dans ce cas, la suite ne converge pas et puisqu'elle est croissante, elle diverge vers $+\infty$.
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et ne *semble* pas minorée, on peut raisonner par l'absurde en supposant que la suite converge vers un réel ℓ et on essaie de trouver une contradiction concernant ℓ. Dans ce cas, la suite ne converge pas et puisqu'elle est décroissante, elle diverge vers $-\infty$.

Cas où f est décroissante

On considère à nouveau les suites définies par

$$u_{n+1} = u_n^\alpha,\ n \in \mathbb{N},$$

mais cette fois avec $\alpha < 0$.
Observons quelques exemples : $\alpha = -2$ et $\alpha = -\dfrac{1}{2}$.



Si f *est décroissante* sur l'intervalle I (stable par f), alors on étudie les suites des termes pairs et impairs :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = u_{2n} \quad \text{et} \quad b_n = u_{2n+1}.$$

On a alors

$$a_{n+1} = u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = (f \circ f)(a_n)$$

Donc la suite a vérifie une relation de récurrence donnée par :

$$a_{n+1} = (f \circ f)(a_n)$$

La fonction $f \circ f$ est croissante sur I et I est un intervalle stable par $f \circ f$ car $f \circ f(I) \subset f(I) \subset I$.
On montre alors comme précédemment que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et admet donc une limite.
De même, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par la relation :

$$b_{n+1} = (f \circ f)(b_n)$$

et on procède de la même façon que pour la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On montre alors comme précédemment que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et admet donc une limite.
Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de monotonie contraire.
On compare ensuite leurs limites.

3.5. Étude du comportement de la suite quand f n'est pas monotone

Précédemment on n'a considéré que des fonctions f monotones, jamais de fonctions en forme de vallée ou de colline. Nous verrons quelques exemples en cours à partir de suites dites logistiques. Ces suites permettent de modéliser l'évolution de populations. Voici la forme de la relation récurrence vérifiée par une suite logistique :

$$y_{t+1} = ry_t(1 - t_y)$$

3.6. Exemple d'étude complète

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{20}(-x^3 + 30x)$. On s'intéresse à la suite définie par

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

1. On commence par rechercher les éventuels points fixes de la fonction f.
   $f(x) = x$ équivaut à $x^3 = 10x$ d'où 3 solutions, $\sqrt{10}$, 0 et $+\sqrt{10}$.
2. On a donc donc que si u_0 est l'un de ces points fixes alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En particulier, si $u_0 = 0$ alors $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Commençons par étudier le cas où $u_0 \in \left]0, \sqrt{10}\right]$.
   (a) En étudiant la dérivée de f, on constate que f est strictement croissante sur $]-\sqrt{10}; \sqrt{10}[$. De plus $f(0) = 0$ et $f(\sqrt{10}) = \sqrt{10}$. Ainsi, $\forall x \in \left]0, \sqrt{10}\right]$, on a $f(x) \in \left]0, \sqrt{10}\right]$.
   Donc l'intervalle $\left]0, \sqrt{10}\right]$ est stable par f.
   (b) L'intervalle $]0, \sqrt{10}]$ étant stable et $u_0 \in \left]0, \sqrt{10}\right]$, on a que $u_n \in]0, \sqrt{10}]$ pour tout n.
   (c) Pour tout entier n, on a
   $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{20}\left(-u_n^3 + 30u_n - 20u_n\right) = \frac{1}{20}\left(-u_n^3 + 10u_n\right) = \frac{u_n}{20}(10 - u_n^2) \geqslant 0$
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.
   (d) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée. Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre $\ell \in]0, \sqrt{10}]$. La fonction f étant continue, ℓ est nécessairement un point fixe de f.
   L'unique point fixe de f sur $]u_0, \sqrt{10}]$ est $\ell = \sqrt{10}$.
   En conclusion, si $u_0 \in]0, \sqrt{10}]$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{10}$.
4. Intéressons nous maintenant à la situation où $u_0 \in \left[-\sqrt{10}, 0\right[$.
   (a) Avec le même genre d'arguments que précédemment, on constate que l'intervalle $\left[-\sqrt{10}, 0\right[$ est stable par f.
   (b) L'intervalle $\left[-\sqrt{10}, 0\right[$ étant stable par f et u_n appartenant à $\left[-\sqrt{10}, 0\right[$, on a que $u_n \in \left[-\sqrt{10}, 0\right[$ pour tout n.
   (c) Pour tout entier n, on a cette fois $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. Ainsi la suite est décroissante et minorée. Donc elle converge vers $-\sqrt{10}$.
5. Observons ce qui se passe si $u_0 \in \left\{-\sqrt{50}, \sqrt{50}\right\}$.

   Si $u_0 = \sqrt{50}$ ou $u_0 = -\sqrt{50}$, on observe que $u_1 = -u_0$ et $u_2 = u_0$. Ainsi, la suite va osciller entre les deux valeurs $\sqrt{50}$ et $-\sqrt{50}$. Elle n'admettra donc pas de limite dans ce cas.
6. Maintenant voyons ce que l'on peut dire dans le cas où $u_0 \in \left]-\infty, -\sqrt{50}\right[\cup \left]\sqrt{50}, +\infty\right[$.
   (a) Tout d'abord, une étude de la fonction f montre que

   $$f\left(\left]-\infty, -\sqrt{50}\right[\right) = \left]+\sqrt{50}, +\infty\right[\quad \text{et} \quad f(\left(\left]+\sqrt{50}, +\infty\right[\right) = \left]-\infty, -\sqrt{50}\right[.$$

   Par conséquent l'ensemble $E = \left]-\infty, -\sqrt{50}\right[\cup \left]\sqrt{50}, +\infty\right[$ est stable par f.

(b) Si $u_0 \in E$, alors par stabilité de E, on a $u_n \in \left]-\infty, -\sqrt{50}\right[\cup \left]\sqrt{50}, +\infty\right[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble E ne contenant aucun point fixe de f, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut donc pas converger. En conclusion, si $u_0 \in E$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

(c) La situation où $u_0 \in]-\sqrt{50}, -\sqrt{10}[\cup]\sqrt{10}, \sqrt{50}[$ est plus difficile à étudier (et n'est pas attendue). On peut montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge toujours vers l'une des deux valeurs $\pm\sqrt{10}$. En revanche, le liens entre la valeur de u_0 et la valeur de la limite est très complexe. En fait, plus u_0 se rapproche des extrémités $\pm\sqrt{50}$, plus le comportement est sensible aux valeurs de u_0 (c'est un phénomène chaotique, on trouve une structure fractale).

4. Systèmes linéaires de suites récurentes. Suites récurrentes linéaires d'ordre p.

Dans ce chapitre les outils d'algèbre linéaire vu en Mathématiques pour l'économiste 3 serons essentiels.
Dans les chapitres précédents, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était à valeur dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que pour tout n, x_n était un nombre réel. Nous considérons ici le cas où la suite noté $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeur dans $\mathbb{R}^p$, c'est-à-dire lorsque pour tout n, X_n est un vecteur (colonne) de $\mathbb{R}^p$. Ce cadre permet de traiter les systèmes de suites ainsi que les suites d'ordre $p \leqslant 1$.
Dans tout ce cours, les vecteurs sont des vecteurs colonnes. Par commodité nous les écrirons souvent en ligne sans omettre la notation de transposition :

$$(x_1, \cdots, x_p)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

.

4.1. Résultat généraux

Etant donnée l'ampleur du sujet nous nous restreignons au cadre linéaire à coefficients constant. Dans toute la suite, $p \in \mathbb{N}^*$ désigne un entier naturel non nul.

Définition.

Une **suite de vecteurs (colonne) de $\mathbb{R}^p$** $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une fonction $X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^p$.
Ceci équivaut à la donnée des p suites réelles $(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout $k = 1, \cdots, p$ avec

$$X_n = \begin{pmatrix} x_{n,1} \\ \vdots \\ x_{n,p} \end{pmatrix}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

.

Définition.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle **équation de récurrence linéaire (du premier ordre) de dimension p** une relation (E) de la forme suivante

$$X_{n+1} = AX_n + F(n), \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{E}$$

avec $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^p$, $A \in \mathcal{M}_p$ et $F : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}^p$.

Lorsque, F est identiquement nulle, c'est-à-dire lorsque $F(n) = \mathbf{0}_p := \Big(0, \cdots, 0\Big)^T$ pour tout n, alors l'équation se réduit à **l'équation homogène**

$$X_{n+1} = AX_n$$

dont la solution est clairement

$$X_n = A^n X_0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Si X_0 n'est pas fixé, on voit que l'ensemble de solution de l'équation homogène est un espace vectoriel linéaire de dimension p :

$$\mathcal{S}^h = \left\{ (A^n V)_{n\in\mathbb{N}},\ V = \Big(v_1, \cdots, v_p\Big)^T \in \mathbb{R}^p \right\}$$

Dans le cas général, le résultat fondamental général est le suivant

Théorème. (Structure des solutions d'une équation récurente homogène de dimension p)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^p$ définie par une équation de récurence linéaire de dimension p

$$X_{n+1} = AX_n + F(n) \tag{E}$$

Soit $X_n^{\mathfrak{p}}$ **une solution particulière** de (E). Alors l'ensemble des solution de (E) est l'ensemble de dimension p :

$$\mathcal{S} = \left\{ (A^n V + X_n^{\mathfrak{p}})_{n\in\mathbb{N}},\ V = \Big(v_1, \cdots, v_p\Big)^T \in \mathbb{R}^p \right\}$$

En particulier, si A est diagonalisable, en notant $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres, et $V_1, \cdots, V_p$ les vecteurs propres associés, il existe $(v_1, \cdots, v_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$X_n = \sum_{i=1}^{p} v_i \lambda_i^n V_i + X_n^{\mathfrak{p}}.$$

Remarque.
On remarque que la solution général X_n est de la forme d'une solution de l'équation homogène $X_n^{\mathfrak{h}} = A^n V$ plus d'une solution particulière $X_n^{\mathfrak{p}}$:

$$X_n = X_n^{\mathfrak{h}} + X_n^{\mathfrak{p}}.$$

En notant $\mathcal{S}^{\mathfrak{h}} = \{(A^n V)_{n\in\mathbb{N}},\ V \in \mathbb{R}^p\}$ l'espace vectorielle de l'ensemble des solution de l'équation homogène, on peut donc écrire :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}^{\mathfrak{h}} + X^{\mathfrak{p}}$$

C'est un espace affine de dimension p parrallèle à $\mathcal{S}^{\mathfrak{h}}$.
C'est exactement le même phénomène que dans le cas des suites récurentes linéaires réelles avec $p = 1$. Ceci est fondamentalement due au caractère linéaire du problème.

Démonstration. La démonstration est identique au cas $p = 1$. Soit $(X_n^{\mathfrak{p}})_{n\in\mathbb{N}}$ une solution particulière et soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une solution quelconque. Notons $U_n = X_n - X_n^{\mathfrak{p}}$. On a

$$U_{n+1} = X_{n+1} - X_{n+1}^{\mathfrak{p}} = (AX_n + F(n)) - (AX_n^{\mathfrak{p}} + F(n)) = A\left(X_n - X_n^{\mathfrak{p}}\right) = AU_n.$$

Par conséquent, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une solution du problème homogène d'où le résultat.
Réciproquement, on vérifie directement que tout élement de $\mathcal{S}$ est solution ce qui termine la preuve.

De façon similaire au cas $p = 1$, si le premier terme $X_0 \in \mathbb{R}^p$ est fixé, alors il y a exactement un élément de $\mathcal{S}$ qui est solution et qui consiste à prendre $V = X_0 - X_0^{\mathfrak{p}}$.

Proposition. (Le problème de récurence linéaire en dimension p)

$$\begin{cases} X_{n+1} = AX_n + F(n),\ \forall n \in \mathbb{N} \\ X_0 \in \mathbb{R}^p \text{ (fixé)} \end{cases}$$

admet une unique solution de terme général

$$X_n = A^n(X_0 - X_0^{\mathfrak{p}}) + X_n^{\mathfrak{p}}$$

où $(X_n^{\mathfrak{p}})_{n\in\mathbb{N}}$ est une solution particulière de (E)

Démonstration. Immédiat si l'on se rappelle que $A^0 = I_p$.

Ce théorème général est très puissant, mais le travail technique n'est pas complet. Dans l'expression de la solution il convient de calculer A^n, ce qui est une difficulté en soit, et surtout de trouver une solution particulière $(X_n^{\mathfrak{p}})_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui n'est pas toujours chose aisée.
Dans le cas particulier où $F(n) = B \in \mathbb{R}^p$ ne dépend pas de n, on a le résultat suivant.

Proposition. (Solutions pour un second membre constant)

Soit l'équation de récurence

$$X_{n+1} = AX_n + B \tag{E}$$

Avec $A \in \mathcal{M}_p$ et $B \in \mathbb{R}^p$.
On suppose que 1 n'est pas une valeur propre de A.
Une solution particulière de (E) est la suite constante de terme général

$$X^{\mathfrak{p}} = (I_p - A)^{-1}B.$$

Par conséquent, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\mathcal{S} = \left\{ (A^nV + (I_p - A)^{-1}B)_{n\in\mathbb{N}},\ V \in \mathbb{R}^p \right\}.$$

De plus si toutes les valeurs propres de A ont leurs module strictement inférieur à 1 alors $X^n \to X^{\mathfrak{p}}$

Démonstration. En cherchant une suite constante $X \in \mathbb{R}^p$ solution on trouve l'équation

$$X = AX + B \iff (I_p - A)X = B.$$

Si 1 n'est pas une valeur propre de A alors $I_p - A$ est inversible ce qui termine la preuve.
Finalement, si toutes les valeurs propres de A ont un module strictement inférieur à 1 alors $A^n \to \mathbf{0}$ ce qui termine la preuve.

Remarque.
Dans le cas $p = 1$, on retrouve le cas des suites réelles arithmético-géométrique (que devient l'hypothèse sur les valeurs propre de A dans ce cas ?).

Remarque.
Si 1 est une valeur propre de A alors ce résultat ne s'applique pas. Il faut chercher une solution particulière dans chaque cas particulier.

Précisons le cas complexe

Proposition. (Cas des valeurs propres complexes)

Rappellons que si A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ alors il existe une matrice inversible P telle que

$$A = PDP^{-1}$$

où P est la matrice des vecteurs propres et $D = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ la matrice diagonales avec les valeurs propres sur la diagonale.
Cette formule est valable dans $\mathbb{C}$ mais alors la matrice P est complexe, ce n'est pas intéressant dans nos applications. Si on a k valeurs propres réelles correspondant à r vecteurs propres indépendants et k blocs de valeurs propres complexes conjuguées $\rho_j e^{\pm i\theta_j}$ (telle que $r + 2k = p$) alors il existe un changement de base *réel* tel que si on note P la matrice de ce nouvelle base on a

$$A = PEP^{-1}$$

où E est la matrice diagonale par blocs

$$E = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & R_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & R_k \end{pmatrix} \text{ avec } R_j = \rho_j \begin{pmatrix} \cos(\theta_j) & -\sin(\theta_j) \\ \sin(\theta_j) & \cos(\theta_j) \end{pmatrix}.$$

On a de plus $A^n = PE^nP^{-1}$ avec

$$E^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r^n & & & \\ & & & R_1^n & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & R_k^n \end{pmatrix} \text{ où } R_j^n = \rho_j^n \begin{pmatrix} \cos(n\theta_j) & -\sin(n\theta_j) \\ \sin(n\theta_j) & \cos(n\theta_j) \end{pmatrix}$$

Terminons par un théorème presque exhaustif sur l'allure des solutions.

Théorème. (Forme de la solution)

On s'intéresse à l'équation $X_{n+1} = AX_n + F(n)$ et on suppose qu'il existe une solution particulière $X_n^{\mathfrak{p}}$

On suppose que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. On a alors r valeurs propres réelles correspondant à r vecteurs propres indépendants $V_1, \cdots, V_r$ et k blocs de valeurs propres complexes conjuguées

$$\rho_j e^{\pm i\theta_j}$$

Nécessairement, $r + 2k = p$.
Alors il existe une famille de r réels notés $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ et de $2k$ vecteurs de $\mathbb{R}^p$ notés $C_1, \cdots, C_k$ et $S_1, \cdots S_k$ tels que

$$X_n = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \lambda_i^n V_i + \sum_{j=1}^{k} \rho_j^n \left(C_j \cos(n\theta_j) + S_j \sin(n\theta_j)\right) + X_n^{\mathfrak{p}}.$$

Les réels α_i et les vecteurs C_j et S_j sont déterminés à l'aide de la condition initiale X_0 et si besoin X_1, X_2, etc. calculés à l'aide de la relation de récurrence.

Remarque.
Si $k = 0$ alors $r = p$ et il n'y a pas de valeurs propres complexes ; si $r = 0$ alors $2k = p$ et il n'y a que des valeurs propres complexes conjuguées.

Remarque.
La remarque ci-dessus ne traite pas du cas non diagonalisable. Dans ce cas il faut calculer A^n directement à la main et des termes polynomiaux en n apparaissent.

Remarque.
En pratique cette formule est attrayante car elle évite de calculer A^n directement, mais il fauttout de même calculer les vecteurs V_i, C_j et S_j ainsi que les réels α_i ce qui peut être tout aussi laborieux. Ceci étant, elle est particulièrement simple à utiliser en dimension $p = 2$.

Méthode.

Pour résoudre une équation de récurrence linéaire de dimension p de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n + F(n) \in \mathbb{R}^p$$

il faut

1. Calculer la solution $\left(X_n^{\text{h}}\right)_n$ de l'équation homogène
   (a) soit via le calcul des puissances de matrices A^n (cf cours Maths 3) et alors $X_n^{\text{h}} = A^n V$, $V \in \mathbb{R}^p$
   (b) soit directement à l'aide de la formule

$$X_n^{\text{h}} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \lambda_i^n V_i + \sum_{j=1}^{k} \rho_j^n \left(C_j \cos(n\theta_j) + S_j \sin(n\theta_j)\right)$$

2. Déterminer une solution particulière $(X_n^{\text{p}})_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Avec la formule du cours si $F(n) = B$ est constant et $det(I_p - A) \neq 0$
   (b) En suivant les indication de l'exercice ou en essayant par soi-même sinon.
3. Il y a alors une infinité de solutions $\mathcal{S}$ de dimension p comme exprimé dans le théorème de structure :
$$X_n = X_n^{\text{h}} + X_n^{\text{p}}$$
   où X_n^{h} dépend de p paramètres réels.
4. Si X_0 est donné, il faut alors déterminer l'unique solution en calculant explicitement les p quantités libres dans X_n^{h} à l'aide des conditions initiales.

Exemple.
On s'intéresse au problème

$$\begin{cases} X_{n+1} = AX_n \\ X_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \end{cases}$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.8 & 0.5 \end{pmatrix}$

C'est une équation homogène. On peut le voir comme un modèle de saut aléatoire entre deux états. On cherche la loi de répartition entre les deux états.

1. Calcul de A^n. La diagonalisation de A donne $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ d'où

$P^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$. On en déduit

$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} &= \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-0.3)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & -(-0.3)^n \\ 8 & (-0.3)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5+8(-0.3)^n & 5-5(-0.3)^n \\ 8-8(-0.3)^n & 8+5(-0.3)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Le terme général de la solution est donc

$$X_n = A^nX_0 = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 10+3(-0.3)^n \\ 16-3(-0.3)^n \end{pmatrix}.$$

Notons que $X_n \to \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ lorsque $n \to +\infty$.

Question : La limite dépend-elle de la valeur initiale X_0 ?

Exemple.
calculer le terme générale de la suite solution du problème

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X_n + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

avec $X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$. On pose bien sur $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. **Calcul de A^n** On voit facilement que les valeurs propres de A sont 2, -1 et 0. avec les vecteurs propres respectif : $(1,0,-1)^T$, $(0,1,0)^T$ et $(1,0,1)^T$. Ainsi en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ il vient

$$A = PDP^{-1}$$

d'où

$$A^n = PD^nP^{-1} = P\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$$

Il reste à calculer P^{-1}. Votre méthode favorite donne $P^{-1} = \frac{1}{2}P^T$ d'où

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & -2^n \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ -2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

2. **Solution particulière** 1 n'étant pas une valeur propre de A, on peut inverser $I_3 - A$. Le second membre B est constant. Par conséquent, on a la solution particulière constante

$$X^{\mathfrak{p}} = (I_3 - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. **Expression générale** L'expression générale des solutions est donc

$$X_n = A^nV + X^{\mathfrak{p}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n(v_1 - v_3) \\ (-1)^n v_2 \\ 2^n(v_3 - v_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ V = (v_1, v_2, v_3)^T \in \mathbb{R}^3.$$

que l'on peut écrire

$$X_n = \begin{pmatrix} 2^{n-1}(v_1 - v_3) \\ \frac{1}{2}(-1)^n v_2 + 1 \\ 2^{n-1}(v_3 - v_1) + 1 \end{pmatrix}.$$

4. **Détermination de la solution unique à l'aide de X_0.** Si $X_0 = (1, 0, 0)^T$ alors en prenant $n = 0$ dans l'expression de X_n, il vient

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} (v_1 - v_3) \\ v_2 + 1 \\ (v_3 - v_1) + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve donc $v_1 - v_3 = 2$ et $v_2 = -2$ d'où l'unique [1] solution de terme général

$$X_n = \begin{pmatrix} 2^n \\ 1 - (-1)^n \\ 2^n + 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple (Avec les complexes).
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On s'intéresse au problème homogène $X_{n+1} = AX_n$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. On peut remarquer que V n'est pas nécessairement unique mais que la suite X_n l'est

Les valeurs propres de A sont $\pm\frac{1}{2}i = \frac{1}{2}e^{\pm i\pi/2}$. Les solutions sont donc de la forme

$$X_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (\cos(n\pi/2)U + \sin(n\pi/2)V)$$

où U et V sont à déterminer. On a $X_0 = U$ et $X_1 = AX_0 = \frac{1}{2}V$ soit $U = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et finalement

$$X_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\cos(n\pi/2)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \sin(n\pi/2)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$$

4.2. Applications aux systèmes linéaires de récurence

Ici l'application est immédiate. Il sagit juste de décrire le problème. On considère donc une famille de p suites $x^{(k)} = (x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ La puissance (k) indique juster le numéro de la suite alors que l'indice n est le rang. On suppose que les $x^{(k)}$ sont liées par le **système linéaire de récurence**

$$\begin{cases} x_{n+1}^{(1)} = a_{1,1}x_n^{(1)} + \cdots + a_{1,p}x_n^{(p)} + b_1(n) \\ x_{n+1}^{(2)} = a_{2,1}x_n^{(1)} + \cdots + a_{2,p}x_n^{(p)} + b_2(n) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_{n+1}^{(p)} = a_{p,1}x_n^{(1)} + \cdots + a_{p,p}x_n^{(p)} + b_p(n) \end{cases} \tag{E}$$

où les $a_{i,j}$ sont des réels et les $b_j(n)$ sont des fonctions de $n \in \mathbb{N}$.

En posant $X_n = \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(p)} \end{pmatrix}$, $B(n) = \begin{pmatrix} b_1(n) \\ \vdots \\ b_p(n) \end{pmatrix}$ et $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$, on voit que (E) équivaut à l'équation de récurence vectorielle de dimension p :

$$X_{n+1} = AX_n + B(n).$$

Les résultats de la partie précédente s'appliquent donc directement.

Exemple.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles vérifiant $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$ et liées par le systéme linéaire de récurence

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + 1 \\ y_{n+1} = x_n - 1 \end{cases}.$$

Posons $X_n = (x_n, y_n)^T$, $B = (1, -1)^T$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Le problème s'écrit sous forme vectorielle

$$X_{n+1} = AX_n + B \text{ avec } X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On trouve facilement que $A^2 = I_2$ (on dit que A est une matrice d'involutive) donc

$$A^n = \begin{cases} A \text{ si } n \text{ est impaire} \\ I_2 \text{ si } n \text{ est paire} \end{cases}$$

si on préfère, ceci peut s'écrire dans une unique formule

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(-1)^n & 1-(-1)^n \\ 1-(-1)^n & 1+(-1)^n \end{pmatrix}.$$

La recherche d'une solution particulière constante donne l'équation

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

qui s'avère avoir une infinité de solution. On peut prendre la suite constante $X^{\mathfrak{p}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La solution est donc de la forme

$$X_n = A^n(X_0 - X^{\mathfrak{p}}) + X^{\mathfrak{p}} = (-1)^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on a les expression pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_n = 1-(-1)^n$ et $y_n = (-1)^n$.

4.3. Applications aux équations récurentes linéaires d'ordre $p \geqslant 1$

Rappellons la définition de la page 22 :

Définition. Suites récurrentes linéaires d'ordre p à coefficients constants

On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite récurrente linéaire à coefficients constants** d'ordre $p \in \mathbb{N}^\star$ s'il existe des réels $a_0, \dots, a_{p-1}$ et une fonction ϕ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+p} = a_0 x_n + a_1 x_{n+1} + \cdots + a_{p-1} x_{n+p-1} + \varphi(n). \tag{E}$$

$\varphi(n)$ est appelé second membre.
Si le second membre $\varphi(n)$ est identiquement nul on dit que l'équation de récurence linéaire est **homogène**.

On peut réécrire l'équation d'ordre p et de dimension 1 (E) sous la forme d'une équation d'ordre 1 de dimension p en écrivant

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+p-1} \\ x_{n+p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_2 & \cdots & \cdots & a_{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_{n+p-2} \\ x_{n+p-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varphi(n) \end{pmatrix}.$$

En posant $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_{n+p-1} \end{pmatrix}$, $F(n) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varphi(n) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{p-1} \end{pmatrix}$, ceci s'écrit de manière

condensé

$$X_{n+1} = AX_n + F(n).$$

Une équation linéaire de dimension 1 et d'ordre p se ramène donc a un cas particulier d'équation linéaire de dimension p et d'ordre 1.
C'est un cas particulier car le second membre a tous ses termes nul sauf le dernier et la matrice A a toujours la forme particulière ci-dessus.
En vertue de ces spécificités, on peux espérer des résultats plus précis que dans le cas général. Dans ce cours nous nous contenterons des résultats suivants.

Théorème. Cas homogène

On suppose ici que $\varphi(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Supposons que A admette p valeurs propres λ_i réelles distinctes. Alors il existe des constantes $V = (v_1, \cdots, v_p)^T \in \mathbb{R}^p$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$x_n^{\mathfrak{h}} = \sum_{i=1}^{p} v_i \lambda_i^n.$$

2. Supposons que A admette r valeurs propres λ_i réelles distinctes et $p - r = 2k$ valeurs propres complexes distinctes que l'on peut regrouper en k paires conjuguées $(r_j e^{-i\theta_j}, r_j e^{i\theta_j})$. Alors il existe des constantes $(v_1, \cdots, v_r)$, $(c_1, \cdots, c_k)$ et $(s_1, \cdots, s_k)$ (soient $r + 2k = p$ constantes à nouveau) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$x_n^{\mathfrak{h}} = \sum_{i=1}^{r} v_i \lambda_i^n + \sum_{j=1}^{k} r_j^n \left(c_j \cos(n\theta_j) + s_j \sin(n\theta_j)\right).$$

Théorème. Cas d'un second membre constant

On suppose ici que $\varphi(n) = b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose également que $\sum_{i=0}^{p-1} a_i \neq 1$.

Alors (E) admet la solution particuliére constante

$$x^{\mathfrak{p}} = \frac{b}{1 - \sum_{i=0}^{p-1} a_i}.$$

En notant $x_n^{\mathfrak{h}}$ la solution du problème homogène associée du théorème précédent, la solution générale de (E) a pour terme général

$$x_n = x_n^{\mathfrak{h}} + x^{\mathfrak{p}}$$

Exemple.
Soit le problème $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n + 1$ avec $(x_0, x_1) = (1, 0)$.

1. On pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5})$ et $\lambda_2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$. Deux racines réelles distinctes. Par conséquent on a les solutions de l'équation homogène

$$x_n^{\mathfrak{h}} = v_1 \lambda_1^n + v_2 \lambda_2^n.$$

2. Par ailleurs comme $1 - 1 \neq 1$ on a une solution particulière constante $x^{\mathfrak{p}} = 1$.
3. Finalement, la forme générale des solutions est pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = v_1\lambda_1^n + v_2\lambda_2^n + 1.$$

où $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.

4. En utilisant la condition initiale $(x_0, x_1) = (1, 0)$ on peut déterminer les constantes v_1, v_2.

$$\begin{cases} 1 = x_0 \\ 0 = x_1 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = v_1 + v_2 + 1 \\ 0 = v_1\lambda_1 + v_2\lambda_2 + 1 \end{cases}$$

La première équation donne $v_1 = -v_2$ et la seconde s'écrit donc $v_2(\lambda_2 - \lambda_1) = -1$ soit $v_2\sqrt{5} = -1$. On en déduit $v_1 = -v_2 = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ et finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left((-1 - \sqrt{5})^n - (-1 + \sqrt{5})^n\right) + 1.$$

Exemple.
Considérons la suite définie par

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X_n, \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice sont

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i.$$

Sous forme trigonométrique :

$$1 \pm i = \sqrt{2}\, e^{\pm i\pi/4}.$$

Le théorème précédent donne donc

$$x_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(c \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + s \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right).$$

Comme

$$x_0 = 1,$$

on obtient

$$c = 1.$$

De plus

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$x_1 = 1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + s \sin\frac{\pi}{4}\right) = 1 + s.$$

Ainsi

$$s = 0.$$

Finalement,

$$x_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

On obtient de même

$$y_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

Exemple.
Considérons la suite définie par

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X_n + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On cherche d'abord une solution particulière constante

$$X^{\mathfrak{p}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Elle doit vérifier

$$X^{\mathfrak{p}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X^{\mathfrak{p}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient le système

$$\begin{cases} a = a - b, \\ b = a + b + 1, \end{cases}$$

d'où

$$a = -1, \qquad b = 0.$$

Ainsi

$$X^{\mathfrak{p}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La solution homogène associée vérifie

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X_n.$$

Les valeurs propres sont

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i = \sqrt{2}\, e^{\pm i\pi/4}.$$

D'après le théorème précédent,

$$x_n^{\mathfrak{h}} = (\sqrt{2})^n \left(c \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + s \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right).$$

La solution générale s'écrit donc

$$x_n = (\sqrt{2})^n \left(c \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + s \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right) - 1.$$

Comme

$$x_0 = 1,$$

on obtient

$$c = 2.$$

De plus

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad x_1 = 1,$$

et donc

$$1 = \sqrt{2} \left(2 \cos\frac{\pi}{4} + s \sin\frac{\pi}{4} \right) - 1 = 1 + s.$$

Par conséquent

$$s = 0.$$

Finalement,

$$\boxed{x_n = 2(\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - 1.}$$

Chapitre 3

Équations différentielles du premier ordre

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction dérivable et qui fait intervenir la fonction et ses dérivées. Résoudre une telle équation, c'est trouver l'ensemble des fonctions qui vérifient cette équation.

Les équations différentielles ordinaires font intervenir les dérivées d'une fonction et ce sont les fonctions vérifiant l'équation qui en sont solutions.
Il n'est pas toujours évident de déterminer la solution générale d'une équation différentielle. On peut alors être amené à représenter graphiquement (à l'aide d'un ordinateur) ces solutions par des approximations successives.

1. Équations « primitives »

Il s'agit de la forme la plus simple d'équation différentielle :

$$y'(t) = g(t).$$

Résoudre cette équation revient à trouver les fonctions donc la dérivée est la fonction g. La résolution revient à une recherche de primitive.

Exemples.

- Une solution de l'équation différentielle $y' = -10t^3$ est la fonction $x \mapsto -\frac{5}{2}t^4$ définie sur $\mathbb{R}$.
- Une solution de l'équation différentielle $y'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ est la fonction $x \mapsto \ln(1+t^2)$ définie sur $\mathbb{R}$.

Méthode.

Lorsque l'équation différentielle peut être mise sous la forme

$$y'(t) = g(t)$$

et si G est une primitive de g, alors les solutions de l'équation proposée sont les fonctions de la forme $y(t) = G(t) + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

Exemples.

- L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = -10t^3$ est l'ensemble des fonctions définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto -\frac{5}{2}t^4 + C$, avec C un réel.
- L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ est $\left\{x \mapsto \ln(1+t^2) + C; C \in \mathbb{R}\right\}$.

2. Équations différentielles linéaires du premier ordre

Dans toute cette section, a et b désignent deux fonctions continues sur un intervalle I non réduit à un point. Toutes les équations différentielles considérées sont définies et résolues sur I.

2.1. Généralités

Définition. Équation différentielle linéaire du premier ordre

On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre** toute équation de la forme $y' + ay = b$:

$$\forall t \in I, \qquad y'(t) + a(t)y(t) = b(t). \tag{E}$$

Si la fonction a est constante, alors on dit que l'équation différentielle est **à coefficients constants**.
La fonction b est appelée le **second membre**.
Si b est la fonction nulle, alors on dit que l'équation, qui s'écrit sous la forme $y' + ay = 0$, c'est-à-dire

$$\forall t \in I, \qquad y'(t) + a(t)y(t) = 0 \tag{E_H}$$

est **homogène**.

Par abus de notation, on notera parfois $y' + a(t)y = b(t)$.

Remarque.
Une équation différentielle de la forme $\alpha y' + \beta y = \gamma$, avec α une fonction ne s'annulant pas sur I, est également une équation différentielle linéaire.
En divisant par la fonction α, on se ramène à la **forme résolue** $y' + \dfrac{\beta}{\alpha} y = \dfrac{\gamma}{\alpha}$.

Exemple.

1. L'équation $y' + 3y = 2$, que l'on peut également noter $y'(t) + 3y(t) = 2$, est une équation linéaire du premier ordre à coefficients constants et second membre constant.
2. L'équation $2y' + 3y = 5t$ est une équation linéaire du premier ordre à coefficients constants et second membre non constant. Elle est équivalente à l'équation $y' + \dfrac{3}{2} y = \dfrac{5t}{2}$.
3. L'équation $y' + 3ty = 2$ que l'on peut également noter $y'(t) + 3ty(t) = 2$ est une équation linéaire du premier ordre mais n'est pas à coefficients constants car la fonction $t \mapsto 3t$ n'est pas constante. Son second membre est constant.

Définition. Solution d'une équation différentielle linéaire

On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est une solution de l'équation $y' + ay = b$ sur I si et seulement si

- la fonction f est dérivable sur I ;
- la fonction f vérifie
$$\forall t \in I, \qquad f'(t) + a(t)f(t) = b(t).$$

Exemple.
La fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto e^{-3t} + \frac{2}{3}$$

est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + 3y = 2$ car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f'(t) + 3f(t) = -3e^{-3t} + 3\left(e^{-3t} + \frac{2}{3}\right) = 2.$$

Proposition. Structure d'espace vectoriel de l'ensemble des solutions

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $y' + ay = 0$ contient la fonction nulle et est stable par combinaison linéaire.
Par conséquent, l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre un est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions dérivables.

Démonstration.

- La fonction nulle est clairement solution de l'équation homogène $y' + ay = 0$.
- Soient f_1 et f_2 deux solutions de l'équation homogène $y' + ay = 0$.
  Alors les fonctions f_1 et f_2 sont dérivables et elles vérifient $f_1' + af_1 = 0$ et $f_2' + af_2 = 0$.
  Soit λ un élément de $\mathbb{R}$.
  Alors la fonction $\lambda f_1 + f_2$ est dérivable, comme combinaison linéaire de fonctions dérivables, et on a

$$\begin{aligned}(\lambda f_1 + f_2)' + a(\lambda f_1 + f_2) &= \lambda f_1' + f_2' + a(\lambda f_1 + f_2)\\ &= \lambda(f_1' + af_1) + f_2' + af_2\\ &= \lambda 0 + 0\\ &= 0,\end{aligned}$$

  ce qui prouve que la fonction $\lambda f_1 + f_2$ est solution de l'équation $y' + ay = 0$.

Donc l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre un est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions dérivables.

Remarque.
Cette démonstration ne dépend pas de l'ordre de l'équation différentielle, mais seulement de sa linéarité.

Remarque.
Nous verrons que si a n'est pas la fonction identiquement nulle alors l'ensemble des solutions de l'équation $y' + ay = 0$ est un espace vectoriel de dimension 1.

2.2. Résolution de l'équation homogène

Théorème. Solutions d'une équation différentielle linéaire homogène

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène $(E_H) : y' + ay = 0$ sur l'intervalle I est

$$\mathcal{S}_H := \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}, \\ t & \mapsto & \lambda e^{-A(t)} \end{array} , \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

où A désigne une primitive sur I de la fonction a.

Démonstration.

- Pour tout réel λ, la fonction

$$f : I \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$$

est solution de l'équation $y' + ay = 0$ car

$$\forall t \in I, \qquad f'(t) + a(t)f(t) = -a(t)\lambda e^{-A(t)} + a(t)\lambda e^{-A(t)} = 0.$$

- Soit f une solution de l'équation $y' + ay = 0$. Alors on a

$$\forall t \in I, \qquad f'(t) + a(t)f(t) = 0.$$

En multipliant par $e^{A(t)}$, on obtient

$$\forall t \in I, \qquad e^{A(t)}f'(t) + a(t)e^{A(t)}f(t) = 0.$$

On reconnaît la dérivée, nulle sur l'intervalle I, de la fonction

$$I \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto e^{A(t)}f(t)$$

ce qui prouve que la fonction est constante :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \qquad e^{A(t)}f(t) = \lambda.$$

Finalement, il existe un réel λ tel que pour tout réel t dans I, $f(t) = \lambda e^{-A(t)}$.

Remarque.
Comme la fonction a est continue, elle admet nécessairement une primitive A, mais il n'est pas toujours possible d'obtenir une expression explicite pour cette dernière.

Remarque.
Si une fonction est une solution non identiquement nulle d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, alors elle ne s'annule pas.

Solutions d'une équation linéaire homogène à coefficients constants.

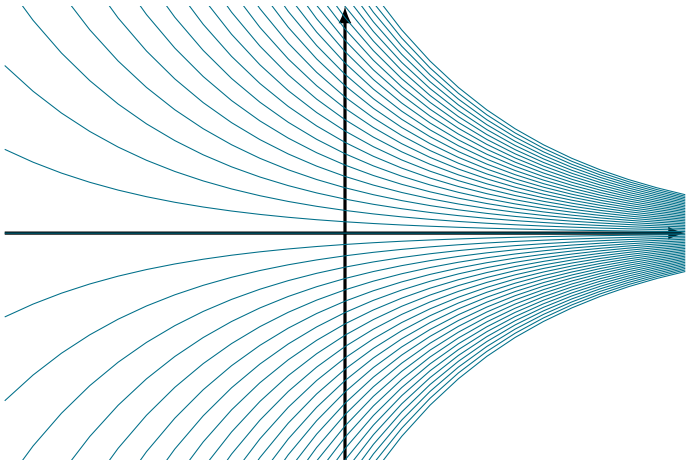
L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants $(E_H) : y' + ay = 0$, où a est un réel, est

$$\mathcal{S}_H := \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-at} \end{array} , \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exemple.
L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire $y' + 3y = 0$ est

$$\mathcal{S} := \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-3t} \end{array} , \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Représentation graphique des courbes représentatives de différentes solutions de l'équation différentielle précédente pour différentes valeur de λ.



2.3. Résolution de l'équation avec second membre

Théorème. Solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre

Soit f_0 une solution de l'équation différentielle linéaire $y' + ay = b$.
Alors l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $y' + ay = b$ est

$$\mathcal{S} = \{f_0 + f, f \in \mathcal{S}_H\},$$

où $\mathcal{S}_H$ désigne l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $y' + ay = 0$.

Démonstration.

- Dans le sens direct, la fonction f_0 est solution de l'équation $y' + ay = b$ donc

  $$f_0' + af_0 = b$$

  et la fonction f est solution de l'équation homogène associée $y' + ay = 0$ donc

  $$f' + af = 0$$

  D'après le principe de superposition, la fonction $f_0 + f$ est solution de l'équation $y' + ay = b$ car

  $$(f_0 + f)' + a(f_0 + f) = f_0' + f' + af_0 + af = \underbrace{f_0' + af_0}_{b} + \underbrace{f' + af}_{0} = b + 0 = b.$$

- Réciproquement, si une fonction g est solution de l'équation différentielle $y' + ay = b$, alors

  $$g' + ag = b$$

  et donc $g - f_0$ est une solution de l'équation différentielle homogène $y' + ay = b$, toujours d'après le principe de superposition car

  $$(g - f_0)' + a(g - f_0) = g' - f_0' + ag - af_0 = \underbrace{g' + ag}_{b} - \underbrace{(f_0' + af_0)}_{b} = b - b = 0.$$

  Finalement, g s'écrit bien sous la forme $g = f_0 + \underbrace{(g - f_0)}_{\in \mathcal{S}_H}$.

Cette démonstration ne dépend pas de l'ordre de l'équation différentielle, mais seulement de sa linéarité.

Remarque.
Si f_1 est une autre solution de l'équation différentielle $y' + ay = b$, alors $\{f_0 + f, f \in \mathcal{S}_H\} = \{f_1 + f, f \in \mathcal{S}_H\}$.

À l'aide de la résolution de l'équation homogène faite précédemment et en déterminant une solution particulière, on obtient l'ensemble des solutions de manière explicite.

Méthode. Résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre

Pour résoudre l'équation différentielle $y' + ay = b$,

1. on détermine l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de l'équation homogène $y' + ay = 0$ en trouvant une primitive A de la fonction a : $\mathcal{S}_H = \left\{t \mapsto \lambda e^{-A(t)}, t \in \mathbb{R}\right\}$;
2. on détermine une solution particulière f_0 de l'équation différentielle $y' + ay = b$;
3. on écrit $\mathcal{S} = \left\{t \mapsto f_0(t) + \lambda e^{-A(t)}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

2.4. Principe de superposition

Proposition. Principe de superposition

Soient a, b_1 et b_2 trois fonctions continues sur I.
Soit f_1 une solution de l'équation différentielle $(E_1) : y' + ay = b_1$.
Soit f_2 une solution de l'équation différentielle $(E_2) : y' + ay = b_2$.
Alors, pour tout réel λ, la fonction $\lambda f_1 + f_2$ est solution de l'équation différentielle $y' + ay = \lambda b_1 + b_2$.

Démonstration.
On a

$$f_1' + af_1 = b_1$$

donc

$$\lambda f_1' + \lambda a f_1 = \lambda b_1$$

et

$$f_2' + af_2 = b_2$$

En additionnant membre à membre les deux équations précédentes, on obtient

$$\lambda f_1' + f_2' + \lambda a f_1 + af_2 = \lambda b_1 + b_2,$$

c'est-à-dire

$$(\lambda f_1 + f_2)' + a(\lambda f_1 + f_2) = \lambda b_1 + b_2.$$

Finalement, la fonction $\lambda f_1 + f_2$ est solution de l'équation différentielle $y' + ay = \lambda b_1 + b_2$.

Cette démonstration ne dépend pas de l'ordre de l'équation différentielle, mais seulement de sa linéarité.

2.5. Quelques seconds membres particuliers pour a constant

On considère l'équation $y' + ay = b$, où a est un réel, dans quelques cas particuliers.

Second membre constant

L'équation différentielle $y' + ay = b$ admet une solution particulière constante.
Celle-ci s'interprète souvent comme étant une situation d'équilibre.
On remarque que c'est la limite de n'importe quelle solution convergente, lorsque (le temps) t tend vers $+\infty$.

Proposition. Second membre constant

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire $y' + ay = b$, avec $a \in \mathbb{R}^\star$ et $b \in \mathbb{R}$ est

$$\mathcal{S} := \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{b}{a} + \lambda e^{-at} \end{array} , \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exemple.
L'ensemble des solutions de l'équation $y' + 3y = 2$ est $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{2}{3} + \lambda e^{-3t} \end{array} , \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

Second membre de type exponentiel

Proposition. Second membre de type exponentiel

Si l'équation est de la forme $y' + ay = e^{mt}$, où m est un réel, alors la fonction $\begin{cases} t \mapsto \dfrac{1}{m+a} e^{mt} & \text{si } m \neq -a \\ t \mapsto te^{mt} & \text{si } m = -a \end{cases}$ est une solution particulière.

Démonstration.
Soit λ un scalaire dans $\mathbb{R}$.

- La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \lambda e^{mt}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f'(t) + af(t) = \lambda m e^{mt} + \lambda a e^{mt} = \lambda(m+a)e^{mt}.$$

  Si $m \neq -a$, alors la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{m+a} e^{mt}$ est solution de l'équation $y'(t) + ay(t) = e^{mt}$.
  Si $m = -a$, alors aucune fonction de cette forme n'est solution de l'équation $y'(t) + ay(t) = e^{-at}$.
- La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \lambda t e^{-at}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \qquad f'(t) + af(t) &= \lambda e^{-at} + \lambda t(-a)e^{-at} + a\lambda t e^{-at} \\ &= \lambda(1 - at + at)e^{-at} \\ &= \lambda e^{-at}. \end{aligned}$$

  En prenant $\lambda = 1$, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto te^{-at}$ est solution de l'équation $y'(t) + ay(t) = e^{-at}$.

Remarque.
Plus généralement, si l'équation est de la forme $y' + ay = P(t)e^{mt}$ où P est un polynôme de degré n, alors il existe un polynôme Q de degré n tel que la fonction $\begin{cases} t \mapsto Q(t)e^{mt} & \text{si } m \neq -a \\ t \mapsto tQ(t)e^{mt} & \text{si } m = -a \end{cases}$ soit une solution particulière.

Remarque.
Ces résultats ne sont pas à connaître par cœur.

Exemple.

1. On considère l'équation $y' + y = e^{2t}$.
   Comme $2 \neq -1$, on cherche une solution particulière sous la forme $f : t \mapsto \lambda e^{2t}$.

$$\begin{aligned} f \text{ est solution} &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) + f(t) = e^{2t} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad 2\lambda e^{2t} + \lambda e^{2t} = e^{2t} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad 3\lambda = 1 \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

   Finalement, la fonction $t \mapsto \frac{1}{3}e^{2t}$ est une solution particulière.
   L'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{3}e^{2t} + Ce^{-t} \end{array} , C \in \mathbb{R} \right\}$.

2. On considère l'équation $y' - y = 2e^{t}$.
   Comme $1 = 1$, on cherche une solution particulière sous la forme $f : t \mapsto \lambda t e^{t}$.

$$\begin{aligned} f \text{ est solution} &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) - f(t) = 2e^{t} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda e^{t} + \lambda t e^{t} - \lambda t e^{t} = 2e^{t} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda e^{t} + \lambda t e^{t} - \lambda t e^{t} = 2e^{t} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda = 2. \end{aligned}$$

   Finalement, la fonction $t \mapsto 2te^{t}$ est une solution particulière.
   L'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 2te^{t} + Ce^{t} \end{array} , C \in \mathbb{R} \right\}$.

2.6. Méthode de variation de la constante

Méthode. Méthode de variation de la constante

Pour déterminer une solution particulière de l'équation $y' + ay = b$, on utilise la **méthode de variation de la constante** : on cherche une solution f_0 sous la forme

$$f_0(t) = \lambda(t)e^{-A(t)},$$

où λ est une fonction dérivable sur I et où A désigne une primitive de a.

On dérive la fonction λ sur I et on obtient

$$\begin{aligned} f_0'(t) &= \lambda'(t)e^{-A(t)} - a(t)\lambda(t)e^{-A(t)} \\ &= \lambda'(t)e^{-A(t)} - a(t)f_0(t). \end{aligned}$$

La fonction f_0 est une solution de l'équation différentielle $y' + ay = b$ si et seulement si

$$\begin{aligned} b(t) &= f_0'(t) + a(t)f_0(t) \\ &= \lambda'(t)e^{-A(t)} - a(t)f_0(t) + a(t)f_0(t) \\ &= \lambda'(t)e^{-A(t)}. \end{aligned}$$

On intègre alors la relation obtenue

$$\lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}$$

pour obtenir une fonction λ qui convient et donc une solution particulière $x \mapsto \lambda(x)e^{-A(x)}$ de l'équation avec second membre.

Exemple.
On cherche une solution de l'équation $y' - ty = 3te^{t^2}$ sous la forme $f_0(t) = \lambda(t)e^{\frac{t^2}{2}}$.
En dérivant, on a $f_0'(t) = \lambda'(t)e^{\frac{t^2}{2}} + x\lambda(t)e^{\frac{t^2}{2}} = \lambda'(t)e^{\frac{t^2}{2}} + tf_0(t)$, c'est-à-dire $f_0'(t) - tf_0(t) = \lambda'(t)e^{\frac{t^2}{2}}$.
Si $\lambda'(t) = 3te^{\frac{t^2}{2}}$, alors $\lambda'(t)e^{\frac{t^2}{2}} = 3te^{t^2}$ et donc f_0 est solution de l'équation.
En intégration, on obtient $\lambda(t) = 3e^{\frac{t^2}{2}} + C$ (on prend $C = 0$).
Finalement, la fonction $f_0 : t \mapsto 3e^{\frac{t^2}{2}}e^{\frac{t^2}{2}} = 3e^{t^2}$ est une solution de l'équation.

2.7. Problème de Cauchy

Définition. Problème de Cauchy

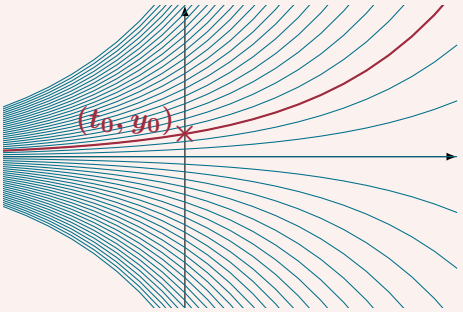
Soient t_0 et y_0 deux réels. On appelle **problème de Cauchy** de (E) de condition $y(t_0) = y_0$ le système

$$(E_{t_0,y_0}) : \begin{cases} y' + ay &= b \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

Théorème. Solution du problème de Cauchy

Soient y_0 et t_0 deux réels.

Le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + ay &= b \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$ admet une *unique* solution.



Remarque.
L'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' + ay &= 0 \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$ est la fonction $f : t \mapsto y_0 e^{-A_0(t)}$, où la fonction $t \mapsto A_0(t) := \int_{t_0}^{t} a(t)\mathrm{d}t$ est la primitive de la fonction a qui s'annule en t_0.

Remarque.
Soient f_1 et f_2 deux solutions de l'équation $(E) : y' + ay = b$.
S'il existe un réel t tel que $f_1(t) = f_2(t)$, alors les fonctions f_1 et f_2 sont égales.

Méthode. Résolution d'un problème de Cauchy

Pour résoudre le problème de Cauchy $\left(E_{(t_0,y_0)}\right)$, on résout l'équation $y(t_0) = y_0$ en utilisant la forme des solutions trouvée précédemment.

Exemple.
On cherche à résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + 3y &= 2 \\ y(0) &= 2 \end{cases}$.

Or l'ensemble des solutions de l'équation $y' + 3y = 2$ est $\left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} & \\ t & \mapsto \dfrac{2}{3} + \lambda e^{-3t} & , \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$.

L'unique solution du problème de Cauchy est donc de la forme $f : t \mapsto \dfrac{2}{3} + \lambda e^{-3t}$.
Pour déterminer le réel λ, on utilise la condition de Cauchy

$$f(0) = 2 \qquad \iff \qquad \frac{2}{3} + \lambda e^{-3\times 0} = 2 \qquad \iff \qquad \lambda = \frac{4}{3}.$$

Finalement, le problème de Cauchy admet pour unique solution la fonction $t \mapsto \dfrac{4}{3}e^{-3t} + \dfrac{2}{3}$.

Méthode. Résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre

Pour **résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre**,

1. On l'écrit sous forme résolue $y' + ay = b$ et on se place sur un intervalle.
2. On résout l'équation homogène $y' + ay = 0$.
3. On cherche une solution particulière de l'équation $y' + ay = b$, en utilisant éventuellement la méthode de variation de la constante.
   Si le second membre s'écrit sous forme d'une combinaison linéaire, on utilise le principe de superposition.
4. On en déduit l'ensemble des solutions de l'équation $y' + ay = b$ à l'aide du théorème de structure.
5. Si on a une condition de Cauchy, alors on détermine l'unique solution en cherchant parmi les solutions de l'équation $y' + ay = b$ celle qui vérifie la condition de Cauchy.

3. Équations différentielles du premier ordre non linéaires autonomes

Les équations différentielles non linéaires ne peuvent pas toujours être résolues explicitement. Cependant il est possible d'obtenir des informations qualitatives sur les fonctions solutions : sens de variation et limite par exemple.

3.1. Introduction

L'expression générale d'une équation différentielle non linéaire d'ordre un est

$$y'(t) = f\left(y_t, t\right).$$

Cependant on ne considèrera que des équations dites autonomes, c'est-à-dire qui ne dépendent pas explicitement de t.

Soient deux intervalles I et J et une fonction continue $f : J \to \mathbb{R}$.

Définition.

On appelle équation différentielle non linéaire autonome d'ordre un toute équation de la forme

$$y'(t) = f\big(y(t)\big), \qquad \forall t \in I$$

avec $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$.

Remarque.
Les fonctions y vérifiant cette équation sont des fonctions de I dans J.

Exemple.

$$y'(t) = 2\sqrt{y(t)}, \forall t \in \mathbb{R}$$

Les fonctions $t \mapsto 0$ et $t \mapsto t^2 \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ sont des solutions. De plus, elles vérifient toutes les deux la condition initiale $y(0) = 0$.
On n'a donc pas forcément unicité de la solution d'une équation différentielle autonome d'ordre un avec une condition initiale.

Définition. Problème de Cauchy

Soient t_0 et y_0 deux réels. On appelle **problème de Cauchy** de (E) de condition $y(t_0) = y_0$ le système

$$(E_{t_0,y_0}) : \begin{cases} y'(t) &= f(y(t)) & \forall t \in I \\ y(t_0) &= y_0 & \text{avec } y_0 \in J,\ t_0 \in I \end{cases}$$

3.2. Unicité de la solution

Théorème. Unicité de la solution

Si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J, alors il existe un intervalle ouvert contenant t_0 (de la forme $]t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon[$) tel qu'il existe une unique solution au problème de Cauchy (P) définie sur cet intervalle.

Exemple.
Notre exemple introductif,

$$y'(t) = 2\sqrt{y(t)}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad y(0) = 0$$

admet plusieurs solutions (en fait une infinité). Il ne vérifie pas les hypothèses du théorème précédent car la fonction f n'est pas dérivable en 0 qui correspond à la valeur requise pour la fonction au temps initial.

Proposition. Conséquence

Soient deux solutions de (P) : y et z.
S'il existe un réel τ tel que $y(\tau) = z(\tau)$, alors on a $y(t) = z(t)$, pour tout réel t.

Remarque.
Graphiquement cela signifie que les courbes représentatives de deux solutions différentes de la même équation ne peuvent pas s'intersecter.
En particulier, si la fonction identiquement nulle est une solution, alors toutes les autres solutions sont de signe constant.

3.3. Existence globale

Proposition.

Il existe un intervalle maximal T contenant t_0 tel que (P) admet une unique solution sur T.

Définition. Solution maximale

On appelle solution maximale au problème de Cauchy (P) une fonction de T dans $\mathbb{R}$, solution de (P), qui ne peut pas être prolongée sur un intervalle plus grand que T.

Exemples.

- $y'(t) = y(t)$ et $y(0) = 1$
  La fonction y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $y(t) = e^t$ est une solution maximale du problème précédent.
- $y'(t) = y^2(t)$ et $y(0) = 1$
  La fonction y de $]-\infty; 1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $y(t) = \dfrac{1}{1-t}$ est une solution maximale du problème précédent.

Théorème. Théorème d'existence globale

Soit y une solution maximale de (P) définie sur T.
Si $y(T)$ est bornée, alors $T = \mathbb{R}$.

Il y a trois situations différentes concernant la limite des solutions :

- soit $T =]t_-; +\infty[$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \ell \in \mathbb{R}$;
- soit $T =]t_-; +\infty[$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \pm\infty$;
- soit $T =]t_-; t_+[$ et $\lim\limits_{t\to t_+} y(t) = \pm\infty$.

Dans le dernier cas, on dit que la solution explose en temps fini.

3.4. Étude qualitative de la solution maximale

Définition. Point d'équilibre

Un point $y^* \in J$ est appelé point d'équilibre de (E) si $f(y^*) = 0$.

Un point d'équilibre est un état d'équilibre. Si une solution maximale démarre à un point d'équilibre, alors elle y reste et, en fait, elle y a toujours été.

Proposition.

Soit y une solution maximale de (E). On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J.
S'il existe $t \in T$ tel que $y(t) = y^*$, alors $y(t) = y^*$, pour tout $t \in T$.

Ainsi, si on ne démarre pas à un point d'équilibre, on ne peut pas l'atteindre. On dit que « les solutions ne peuvent pas traverser les points d'équilibre ».

Proposition. Limites possibles

Soit y une solution maximale de (E) définie sur $]t_-;+\infty[$.
Si la fonction y converge, alors elle converge vers un point d'équilibre.

Démonstration. On considère l'équation

$$y'(t) = f(y(t)), \qquad \forall t \in I$$

Soit y une solution maximale de cette équation, définie sur $]t_-;+\infty[$.

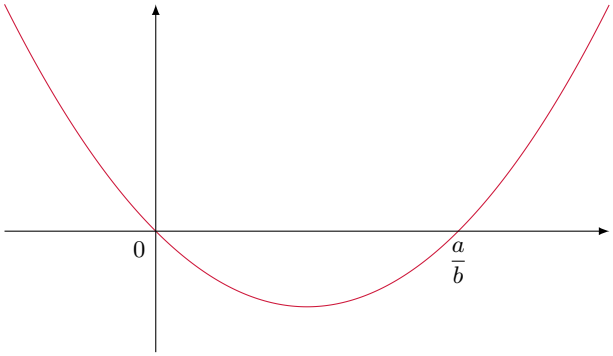
- S'il existe un réel t tel que $y'(t) = 0$, alors $f(y(t)) = 0$. Ainsi il existe un point d'équilibre y^*, tel que $y(t) = y^*$. Et en fait, on a $y(t) = y^*$ pour tout t. En conclusion $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = y^*$.
- Si, pour tout t, on a $y'(t) \neq 0$. Alors y' est de signe constant (car y' est continue). Donc la fonction y est monotone.
  Or si une fonction converge et est monotone, alors, forcément, sa dérivée tend vers 0. Ainsi $\lim\limits_{t\to+\infty} y'(t) = 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(y(t)) = 0$.
  De plus $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = l$ donc, comme f est continue, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(y(t)) = f(l)$. Par unicité des limites, on obtient $f(l) = 0$. Donc la limite l est un point d'équilibre de f.

3.5. Étude complète

Soient a et b deux réels non nuls. On s'intéresse au problème de Cauchy suivant

$$(P) \ : \ \begin{cases} y'(t) = ay(t) - by^2(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

On va étudier le comportement asymptotique de la solution maximale de l'équation différentielle, en fonction de la valeur initiale $y_0 = y(0)$.
On suppose que $a < 0$ et $b < 0$. La fonction $f : x \mapsto ax - bx^2$ a pour représentation graphique :



La fonction f admet deux points d'équilibre 0 et $\dfrac{a}{b}$. Donc si $y_0 = 0$, l'unique solution est la fonction constante égale à 0 et si $y_0 = \dfrac{a}{b}$, alors l'unique solution est la fonction constante égale à $\dfrac{a}{b}$. Sinon, si $y_0 \neq 0$ et $y_0 \neq \dfrac{a}{b}$, la solution ne prendra jamais la valeur 0 ou la valeur $\dfrac{a}{b}$.

Cas où $y_0 \in \left]0; \dfrac{a}{b}\right[$.

On note y la solution maximale et I son intervalle de définition.
Comme $y_0 \in \left]0; \dfrac{a}{b}\right[$, que y est continue et qu'une solution ne peut pas traverser les points d'équilibre, on a, pour tout t, $y(t) \in \left]0; \dfrac{a}{b}\right[$. Ainsi la solution y est bornée, c'est-à-dire $y(I)$ est bornée. Par conséquent $I = \mathbb{R}$,

la solution y est donc définie sur tout $\mathbb{R}$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) \in \left]0; \frac{a}{b}\right[$ et pour tout $x \in \left]0; \frac{a}{b}\right[$, $f(x) < 0$, on a ainsi $y'(t) < 0$ pour tout t. La fonction y est par conséquent strictement décroissante. La fonction y étant de plus minorée, elle converge. Or les seules limites possibles sont les états d'équilibre. On obtient $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$.

Cas où $y_0 < 0$.

On note y la solution maximale et I son intervalle de définition.
Comme $y_0 < 0$, que y est continue et qu'une solution ne peut pas traverser les points d'équilibre, on a, pour tout t, $y(t) < 0$.
Or pour tout $x < 0$, $f(x) > 0$, on a ainsi $y'(t) > 0$ pour tout t. La fonction y est par conséquent strictement croissante.
Comme y est croissante et majorée par 0, elle est bornée au-delà de t_0. Par conséquent $I = \mathbb{R}$, la solution y est donc définie sur tout $\mathbb{R}$ et elle converge. Or les seules limites possibles sont les états d'équilibre. On obtient $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$.

Cas où $y_0 > \dfrac{a}{b}$.

On note y la solution maximale et I son intervalle de définition.
Comme $y_0 > \frac{a}{b}$, que y est continue et qu'une solution ne peut pas traverser les point d'équilibre, on a, pour tout t, $y(t) > \frac{a}{b}$.
Or pour tout $x > \frac{a}{b}$, $f(x) > 0$, on a ainsi $y'(t) > 0$ pour tout t. La fonction y est par conséquent strictement croissante.
D'après le théorème de la limite monotone, soit elle tend vers $+\infty$, soit elle converge. Or si elle converge, c'est forcément vers un état d'équilibre ce qui est impossible dans ce cas. Donc on a que y tend vers $+\infty$. Cependant on ne sait pas si c'est en $+\infty$ ou avant, c'est-à-dire si on est en présence d'une explosion en temps fini.

4. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Equations differentielle linéaire d'ordre p.

Dans ce chapitre les outils d'algèbre linéaire vu en Mathématiques pour l'économiste 3 serons essentiels.
Dans les chapitres précédents, la fonction y était à valeur dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que pour tout $t \in J$, $y(t)$ était un nombre réel. Nous considérons ici le cas où Y est à valeur dans $\mathbb{R}^p$, c'est-à-dire lorsque pour tout $t \in J$, $Y(t)$ est un vecteur (colonne) de $\mathbb{R}^p$. Ce cadre permet de traiter les systèmes d'équation différentielles ainsi que les équation différentielles d'ordre $p \leqslant 1$.
Dans tout ce cours, les vecteurs sont des vecteurs colonnes. Par commodité nous les écrirons souvent en ligne sans omettre la notation de transposition :

$$Y(t) = (y_1(t), \cdots, y_p(t))^T = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{pmatrix}.$$

On notera également

$$Y'(t) = (y_1'(t), \cdots, y_p'(t))^T.$$

4.1. Résultat généraux

Etant donnée l'ampleur du sujet nous nous restreignons au cadre linéaire à coefficients constant. Dans toute la suite, $p \in \mathbb{N}^*$ désigne un entier naturel non nul.

Définition.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle **équation différentielle linéaire(du premier ordre) de dimension p** une relation (E) de la forme suivante

$$Y'(t) = AY(t) + B(t), \tag{E}$$

avec $Y(t) \in \mathbb{R}^p$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}_p$ et $B : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^p$ sera supposé C^1.

Indiquons tout de suite le résultat suivant.

Proposition. Existence et unicité de la solution

Les solutions de (E) sont définie pour tout $t \in \mathbb{R}$. De plus, soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y'(t) = AY(t) + B(t) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution Y définie $\forall t \in \mathbb{R}$.
Sans perte de généralité [a], on supposera dans la suite que $t_0 = 0$.

a. il suffit de faire le changement de temps $s = t - t_0$ ce qui revient a compter le temps à partir de t_0.

Lorsque, B est identiquement nulle, alors l'équation se réduit à **l'équation homogène**

$$Y' = AY$$

dont la solution est notée pour tout $t, t_0 \in \mathbb{R}$:

$$Y(t) = e^{tA}Y(0)$$

Cette expression fait intervenir l'exponentielle de la matrice tA. Rappellons (?) une définition et quelques propriétés essentielles de **l'exponentiel de matrice**

Définition. Exponentiel de matrice

Soit $tA \in \mathcal{M}_p$. On note

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \in \mathcal{M}_p.$$

(Si $A \in \mathbb{R}$ est un nombre, c'est exactement la définition formelle de l'exponentielle d'un nombre.)

Proposition. Exponentiel de matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_p$ et $t \in \mathbb{R}$.

- **Matrices diagonales.** Si $A = diag(d_1, \cdots, d_p)$ alors $e^{tA} = diag(e^{td_1}, \cdots, e^{td_p})$.
  En particulier si $\mathbf{0}$ est la matrice carrée nulle de taille p, alors $e^{t\mathbf{0}} = I_p$.
- **Matrices diagonalisables.** Si il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$ alors
$$e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}.$$
  (C'est cette propriété qui sera la plus utile pour le calcul explicite).
- **Cas de tA.** Si $t, s \in \mathbb{R}$ alors $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$.
- **Dérivation.** On a la formule de dérivation $(e^{tA})' = Ae^{tA} = e^{tA}A$.
- **Limite.** Si toutes les valeurs propres de A sont (de parties réelles) strictement négatives alors
$$\lim_{t\to+\infty} e^{tA} = \mathbf{0}.$$
- **Cas complexe.** Supposons que A admette r valeurs propres λ_i réelles distinctes et $p-r = 2k$ valeurs propres complexes distinctes que l'on peut regrouper en k paires conjuguées $(\mu_j - i\nu_j, \mu_j + i\nu_j)$. Alors il existe il existe une matrice inversible P telle que
$$e^{tA} = PG(t)P^{-1}.$$
  où
$$G(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & e^{\lambda_r t} & & & \\ & & & R_1(t) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & R_k(t) \end{pmatrix}, \text{ avec } R_j(t) = e^{\mu_j t}\begin{pmatrix} \cos(\nu_j t) & -\sin(\nu_j t) \\ \sin(\nu_j t) & \cos(\nu_j t) \end{pmatrix}.$$

Revenons à nos équations différentielles. Si $Y(0)$ n'est pas fixé, on voit que l'ensemble de solution de l'équation homogène est un espace vectoriel linéaire de dimension p :

$$\mathcal{S}^{\mathfrak{h}} = \left\{ t \mapsto e^{tA}V,\ V = \begin{pmatrix} v_1, \cdots, v_p \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^p \right\}$$

Dans le cas général, le résultat fondamental général est le suivant

Théorème. (Structure des solutions d'une équation différentielle linéaire de dimension p)

Soit $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ une fonction solution de l'équation différentielle

$$Y' = AY + B(t) \tag{E}$$

Soit $Y^{\mathfrak{p}}$ **une solution particulière** de (E). Alors l'ensemble des solution de (E) est l'ensemble de dimension p :

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto e^{tA}V + Y^{\mathfrak{p}}(t),\ V = \Big(v_1, \cdots, v_p\Big)^T \in \mathbb{R}^p \right\}$$

En particulier, si A est diagonalisable, en notant $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres, et $V_1, \cdots, V_p$ les vecteurs propres associés, il existe $(v_1, \cdots, v_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{p} v_i e^{\lambda_i t} V_i + Y^{\mathfrak{p}}(t).$$

(Cette dernière formule sera la plus utile dans la pratique)

Remarque.
On remarque que la solution général Y est de la somme d'une solution de l'équation homogène $Y^{\mathfrak{h}} = e^{tA}V$ et d'une solution particulière $Y^{\mathfrak{p}}$:

$$Y = Y^{\mathfrak{h}} + Y^{\mathfrak{p}}.$$

En notant $\mathcal{S}^{\mathfrak{h}} = \left\{ e^{tA}V,\ V \in \mathbb{R}^p \right\}$ l'espace vectorielle de l'ensemble des solution de l'équation homogène, on peut donc écrire :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}^{\mathfrak{h}} + Y^{\mathfrak{p}}$$

C'est un espace affine de dimension p parallèle à $\mathcal{S}^{\mathfrak{h}}$.

Démonstration. La démonstration est identique au cas $p = 1$.

De façon similaire au cas $p = 1$, si la condition initiale $Y(0) \in \mathbb{R}^p$ est fixé, alors il y a exactement un élément de $\mathcal{S}$ qui est solution et qui consiste à prendre $V = Y(0) - Y^{\mathfrak{p}}(0)$.

Proposition. (Le problème de Cauchy linéaire en dimension p)

Le problème

$$\begin{cases} Y' = AY + B(t),\ \forall t \in \mathbb{R} \\ Y(0) = Y_0 \in \mathbb{R}^p \text{ (fixé)} \end{cases}$$

admet une unique solution

$$Y(t) = e^{tA}(Y_0 - Y^{\mathfrak{p}}(0)) + Y^{\mathfrak{p}}(t)$$

où $Y^{\mathfrak{p}}$ est une solution particulière de (E).

Démonstration. Immédiat si l'on se rappelle que $e^{0A} = I_p$.

Ce théorème général est très puissant, mais le travail technique n'est pas complet. Dans l'expression de la solution il convient de calculer **l'exponentielle de matrice** e^{tA}, ce qui est une difficulté en soit, et surtout de trouver une solution particulière $Y^{\mathfrak{p}}$, ce qui n'est pas toujours chose aisée.
Dans le cas particulier où $B(t) = B \in \mathbb{R}^p$ ne dépend pas de t, on a le résultat suivant.

Proposition. (Solutions pour un second membre constant)

Soit l'équation de récurence

$$Y' = AY + B \tag{E}$$

Avec $A \in \mathcal{M}_p$ et $B \in \mathbb{R}^p$.
On suppose que A est inversible.
Une solution particulière de (E) est la fonction constante de terme général

$$Y^{\mathfrak{p}} = -A^{-1}B.$$

Par conséquent, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto e^{tA}V - A^{-1}B,\ V \in \mathbb{R}^p \right\}.$$

De plus si toutes les valeurs propres de A sont de parties réelles strictement négatives alors

$$\lim_{t \to +\infty} Y(t) = Y^{\mathfrak{p}}.$$

Démonstration. Immédiat

Remarque.
Dans le cas $p = 1$, on retrouve le cas des équation différentielles linéaires réelles (que devient l'hypothèse sur l'inversibilité de A dans ce cas ?).

Remarque.
Si A n'est pas inversible, alors ce résultat ne s'applique pas. Il faut chercher une solution particulière dans chaque cas particulier.

Remarque.
Le dernier point de la proposition est important dans les applications. Si l'objectif est d'étudier la limite lorsque $t \to +\infty$ alors la connaissance des valeurs propres de A peut suffire et le calcul explicite (et laborieux) de e^{tA} peut (et doit) être évité.

Méthode.

Pour résoudre une équation différentielle linéaire de dimension p de la forme

$$Y' = Ay + B(t)$$

il faut

1. Calculer l'exponentielle de matrice e^{tA} (cf cours Maths 3). Les solutions de l'équation homogène sont $Y^{\mathfrak{h}}(t) = e^{tA}V$ avec $V = (v_1, \cdots, v_p)^T \in \mathbb{R}^p$ un vecteur quelconque.
   Si A est diagonalisable réelle alors on pourra éviter le calcul explicite de e^{tA} et écrire directement (avec $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ ses valeurs propres et $(V_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ les vecteurs propres associés) :

$$\boldsymbol{Y^{\mathfrak{h}}(t) = \sum_{i=1}^{p} v_i e^{t\lambda_i} V_i.}$$

2. Déterminer une solution particulière $Y^{\mathfrak{p}}$.
   (a) **Avec la formule du cours si $B(t) = B$ est une constante et $det(A) \neq 0$**
   (b) En suivant les indication de l'exercice ou en essayant par soit même sinon.
3. Il y a alors une infinité de solutions $\mathcal{S}$ de dimension p comme exprimé dans le théorème de structure :
   $$Y(t) = e^{tA}V + Y^{\mathfrak{p}}(t)$$
   où $V = (v_1, \cdots, v_p)^T$ est quelconque.
4. Si $Y(t_0)$ est donnée en un certain $t_0 \in \mathbb{R}$, il faut alors déterminer l'unique solution en calculant le vecteur V en prenant $t = t_0$ dans l'expression de $Y(t)$.

4.2. Calculs explicites (en particulier pour $p = 2$)

Comme dit ci-dessus, **Si A est diagonalisable réelle alors on pourra éviter le calcul explicite de e^{tA}** Mais on peut de plus vouloir éviter également le calcul fastidieux des vecteurs propres $\mathbf{V_i} = (\mathbf{V_{i,k}})_{\mathbf{1\leqslant k\leqslant p}}$ et les remplacer par des résolutions de systèmes linéaires (fastidieux également ...).
En effet, en notant $Y(t) = (y_k(t))_{k=1,\cdots,p}$, $Y^{\mathfrak{p}}(t) = (y_k^{\mathfrak{p}})_{1\leqslant k\leqslant p}$ et $\beta_{i,k} = v_i V_{i,k}$, on trouve les formules

$$y_k(t) = \sum_{i=1}^{N} v_i e^{t\lambda_i} V_{i,k} = \sum_{i=1}^{p} \beta_{i,k} e^{t\lambda_i} + y_k^{\mathfrak{p}}(t)$$

Chaque y_k est donc déterminé par les $\beta_{i,k}$, $i = 1, \cdots, p$.
En calculant les $p-1$ dérivées puis en prenant $t = t_0$, on obtient le système (pour chaque k) :

$$\begin{cases} y_k(t_0) = \sum_{i=1}^{p} \beta_{i,k} e^{\lambda_i t_0} + y_k^{\mathfrak{p}}(t_0), \\ y_k'(t_0) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \beta_{i,k} e^{\lambda_i t_0} + \left(y_k^{\mathfrak{p}}\right)'(t_0), \\ \vdots \\ y_k^{(p-1)}(t_0) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^{p-1} \beta_{i,k} e^{\lambda_i t_0} + \left(y_k^{\mathfrak{p}}\right)^{(p-1)}(t_0), \end{cases} \tag{3.1}$$

Et on trouve les $\beta_{i,k}$ en résolvant ce système, qui est inversible dès que les valeurs propres λ_i sont deux à deux distinctes (Nous nous contenterons ici d'admettre ce résultat [1]).
.... Ceci étant, on ne connait pas *apriori* les dérivées j-ième à t_0 (notée $y_k^{(j)}(t_0)$) mais uniquement les $y_k(t_0)$. On s'en sort en remarquant qu'en tout t le vecteur $Y(t)$ est solution de l'équation différentielle $Y'(t) = AY(t) + B(t)$

1. Le lecteur intéressé pourra consulter la notion de déterminant de Vandermonde.

ce qui donne $Y'(t_0) = AY(t_0) + B(t_0)$ puis $[Y''(t_0) = AY'(t_0) + B'(t_0) = A^2Y(t_0) + AB(t_0) + B'(t_0)$ et ainsi de suite...
Cette méthode est explicite mais finalement assez laborieuse (en particulier il faut calculer les puissances A^k...) sauf pour le cas $p = 2$ où elle est efficace et assez directe.
Dans ce cas particulier $p = 2$, on utilise seulement la relation $Y'(t_0) = AY(t_0) + B(t_0)$ ce qui évite le calcul des dérivées d'ordre supérieur. On a donc pour la coordonnée k :

$$y_k'(t_0) = a_{k1}y_1(t_0) + a_{k2}y_2(t_0) + b_k(t_0).$$

et le système 3.1 s'écrit simplement (pour chaque $k = 1, 2$)

$$\begin{cases} y_k(t_0) = \beta_{1,k}e^{\lambda_1 t_0} + \beta_{2,k}e^{\lambda_2 t_0} + y_k^{\mathfrak{p}}(t_0), \\ y_k'(t_0) = \lambda_1\beta_{1,k}e^{\lambda_1 t_0} + \lambda_2\beta_{2,k}e^{\lambda_2 t_0} + \left(y_k^{\mathfrak{p}}\right)'(t_0), \end{cases} \tag{3.2}$$

Ce qui permet de déterminer les $\beta_{1,k}$ et $\beta_{2,k}$ facilement.
Dans le cas $p = 2$, cette méthode s'adapte également aux deux autres situations possibles : lorsque les valeurs propres sont complexes conjuguées ou lorsqu'il existe une valeur propre réelle double sans diagonalisation. On obtient alors une méthode pratique et entièrement effective en dimension 2.

Méthode. Méthode pratique en dimension 2

Considérons le système

$$Y'(t) = AY(t) + B(t),$$

où $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Chercher une solution particulière $Y^{\mathfrak{p}}(t)$.
3. Écrire la forme générale de la solution homogène selon la nature des valeurs propres :
   - Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sont réelles :
   $$Y^{\mathfrak{h}}(t) = \begin{pmatrix} \beta_{1,1}e^{\lambda_1 t} + \beta_{2,1}e^{\lambda_2 t} \\ \beta_{1,2}e^{\lambda_1 t} + \beta_{2,2}e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}.$$
   - Si les valeurs propres sont complexes conjuguées $\lambda = \alpha \pm i\omega$:
   $$Y^{\mathfrak{h}}(t) = e^{\alpha t}\Big(C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)\Big),$$
   où $C, D \in \mathbb{R}^2$.
   - Si A possède une valeur propre double λ et n'est pas diagonalisable :
   $$Y^{\mathfrak{h}}(t) = (C + tD)e^{\lambda t},$$
   où $C, D \in \mathbb{R}^2$.
4. La solution générale est alors
   $$Y(t) = Y^{\mathfrak{h}}(t) + Y^{\mathfrak{p}}(t).$$
5. Déterminer les constantes à l'aide de la condition initiale $Y(t_0)$ et de la relation
   $$Y'(t_0) = AY(t_0) + B(t_0).$$
   Cette dernière fournit un système linéaire permettant de calculer les constantes sans utiliser les vecteurs propres.

Exemple.
Considérons le système

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A possède les valeurs propres distinctes $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -1$. Elle est donc diagonalisable. On cherche une solution particulière constante

$$Y^{\mathfrak{p}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

En résolvant

$$AY^{\mathfrak{p}} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

on obtient

$$Y^{\mathfrak{p}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La solution générale s'écrit alors

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \beta_{1,1}e^{2t} + \beta_{2,1}e^{-t} \\ \beta_{1,2}e^{2t} + \beta_{2,2}e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$Y'(0) = A\,Y(0) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

on détermine les constantes :

$$\beta_{1,1} = \frac{1}{3}, \qquad \beta_{2,1} = -\frac{1}{6}, \qquad \beta_{1,2} = 0, \qquad \beta_{2,2} = -1.$$

Finalement,

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{6}e^{-t} - \frac{1}{6} \\ 1 - e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Exemple.
Considérons le système homogène

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y(t), \qquad Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A admet la valeur propre double $\lambda = 2$ et n'est pas diagonalisable.
La solution générale est donc de la forme

$$Y(t) = (C + tD)e^{2t},$$

où $C, D \in \mathbb{R}^2$.
Comme

$$Y(0) = C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et

$$Y'(0) = AY(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

on obtient

$$D = Y'(0) - 2C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$Y(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple.
Considérons le système

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont

$$1 \pm 2i.$$

On cherche une solution particulière constante

$$Y^{\mathfrak{p}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

En résolvant

$$AY^{\mathfrak{p}} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

on obtient

$$Y^{\mathfrak{p}} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

La solution homogène s'écrit

$$Y^h(t) = e^t \Big(C\cos(2t) + D\sin(2t) \Big),$$

où $C, D \in \mathbb{R}^2$.

Comme

$$Y(0) = 0,$$

on trouve

$$C = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

De plus,

$$Y'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ce qui donne

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$Y(t) = e^t \left[\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \cos(2t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \sin(2t) \right] + \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

4.3. Applications aux systèmes différentiels linéaires

Ici l'application est immédiate. Il sagit juste de décrire le problème. On considère donc une famille de p fonctions y_k que l'on suppose liées par le **système différentiels linéaire**

$$\begin{cases} y_1' = a_{1,1}y_1 + \cdots + a_{1,p}y_p + b_1(t) \\ y_2' = a_{2,1}y_1 + \cdots + a_{2,p}y_p + b_2(t) \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ y_p' = a_{p,1}y_1 + \cdots + a_{p,p}y_p + b_p(t) \end{cases} \tag{E}$$

où les $a_{i,j}$ sont des réels et les b_j des fonctions C^1.

En posant $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_p(t) \end{pmatrix}$ et $A = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$, on voit que (E) équivaut à l'équation différentielle de dimension p :

$$Y' = AY + B(t).$$

Les résultats de la partie précédente s'appliquent donc directement.

Exemple.
Soit x et y deux fonctions vérifiant le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 2y(t) + 1 \\ y'(t) = 2x(t) - 3y(t) \end{cases}.$$

et les conditions initiales $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

0. Etude préliminaire de A. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ admet 2 valeurs propres distinctes $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = 1$. dont les vecteurs propres sont respectivement $V_1 = (2,1)^T$ et $V_2 = (1,2)^T$. Les deux valeurs propres sont disctinctes et A est une matrice 2×2 dont elle est diagonalisable. Zero n'est pas valeur propre donc A est inversible.
1. **Solutions homogènes.** Comme A est diagonalisable, on peut ne pas calculer e^{tA} et utiliser directement la forme dévelloper. Les solutions homogènes s'écrivent $y^{\mathfrak{h}}(t) = v_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + v_2 e^{\lambda_2 t} V_2$ soit

$$y^{\mathfrak{h}}(t) = v_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + v_2 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$$

2. **Solution particulière.** comme A est inversible, on trouve facilement la solution constante

$$Y^{\mathfrak{p}} = -A^{-1}B = -\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. **Solution générale.** Les solutions de l'équation différentielle matricielle sont donc de la forme

$$Y(t) = Y^{\mathfrak{h}}(t) + Y^{\mathfrak{p}}$$

soit

$$Y(t) = v_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + v_2 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

où $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ sont quelconques. En d'autres termes comme $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, on obtient

$$x(t) = 2v_2 e^{-2t} + v_2 e^{t} - 3/2$$
$$y(t) = v_1 e^{-2t} + 2v_2 e^{t} - 1.$$

4. **Détermination de l'unique solution avec la condition initiale.** On a $Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'où en prenant $t = 0$ dans l'expression de $Y(t)$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit le système d'inconnues (v_1, v_2),

$$\begin{cases} 2v_1 + v_2 = 3/2 \\ v_1 + 2v_2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} v_1 = \dfrac{1}{3} \\ v_2 = \dfrac{5}{6} \end{cases}$$

On a donc

$$Y(t) = \frac{1}{3} e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{6} e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. **Retour aux fonctions inconnues initiales.** On en déduit donc que

$$x(t) = \frac{2}{3} e^{-2t} + \frac{5}{6} e^{t} - 3/2 \text{ et } y(t) = \frac{1}{3} e^{-2t} + \frac{5}{3} e^{t} - 1.$$

4.4. Applications aux équations récurentes linéaires d'ordre $p \geqslant 1$

rappellons qu'on note $y^{(k)}$ la dérivée k-iéme de la fonction y.

Définition. Equation différentielle linéaires d'ordre p à coefficients constants

On dit qu'une fonction y est solution d'une **équation différentielle linéaire** d'ordre $p \in \mathbb{N}^\star$ s'il existe des réels $a_0, \ldots, a_{p-1}$ et une fonction ϕ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y^{(p)} = a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_{p-1} y^{(p-1)} + \varphi(t). \tag{E}$$

$\varphi(t)$ est appelé second membre.
Si le second membre $\varphi(t)$ est identiquement nul on dit que l'équation différentielle linéaire est **homogène**.

On peut réécrire l'équation d'ordre p et de dimension 1 (E) sous la forme d'une équation d'ordre 1 de dimension p en écrivant

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(p-1)}(t) \end{pmatrix}, \; B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varphi(t) \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ a_0 & \cdots & & a_{p-1} \end{pmatrix}.$$

Alors (E) équivaut) $Y' = AY + B(t)$.

Une équation linéaire de dimension 1 et d'ordre p se ramène donc a un cas particulier d'équation linéaire de dimension p et d'ordre 1.

C'est un cas particulier car le second membre a tous ses termes nul sauf le dernier et la matrice A a toujours la forme particulière ci-dessus.

En vertue de ces spécificités, on peux espérer des résultats plus précis que dans le cas général. Dans ce cours nous nous contenterons des résultats suivants.

Théorème. Cas homogène

On suppose ici que $\varphi(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Supposons que A admette p valeurs propres λ_i réelles distinctes. Alors il existe des constantes $V = (v_1, \cdots, v_p)^T \in \mathbb{R}^p$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$y^\natural(t) = \sum_{i=1}^{n} v_i e^{t\lambda_i}.$$

2. Supposons que A admette r valeurs propres λ_i réelles distinctes et $p - r = 2k$ valeurs propres complexes distinctes que l'on peut regrouper en k paires conjuguées $(\mu_j - i\nu_j, \mu_j + i\nu_j)$. Alors il existe des constantes $(v_1, \cdots, v_r)$, $(c_1, \cdots, c_k)$ et $(s_1, \cdots, s_k)$ (soient $r + 2k = p$ constantes à nouveau) telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$y^\natural(t) = \sum_{i=1}^{r} v_i e^{t\lambda_i} + \sum_{j=1}^{k} e^{t\mu_j} \left(c_j \cos(t\nu_j) + s_j \sin(t\nu_j)\right).$$

Théorème. Cas d'un second membre constant

On suppose ici que $\varphi(t) = b$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On suppose également que $a_0 \neq 0$.
Alors (E) admet la solution particuliére constante

$$x^{\mathfrak{p}} = -\frac{b}{a_0}.$$

En notant $y^{\mathfrak{h}}$ la solution du problème homogène associée du théorème précédent, la solution générale de (E) a pour terme général

$$Y(t) = y^{\mathfrak{h}}(t) + y^{\mathfrak{p}}$$

Exemple.
Soit l'équation

$$y'' = 2y + y' - 3.$$

avec les conditions intiales $y(0) = y'(0) = 0$. On pose $Y = (y, y')^T$, $B = (0, -3)^T$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Le système équivaut à $Y' = AY + B$. Les valeurs propres de A sont les nombres complexes $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les solutions de l'équation homogènes sont donc

$$y^{\mathfrak{h}}(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(c_1 \cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + s_1 \sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).$$

On trouve une solution constante $y^{\mathfrak{p}} = -\frac{3}{2}$. On en déduit l'expression général de la solution

$$y(t) = y^{\mathfrak{h}}(t) + y^{\mathfrak{p}}(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(c_1 \cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + s_1 \sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) - \frac{3}{2}.$$

En utilisant les conditions initiales, on trouve en prenant $t = 0$:

$$y(0) = 0 = c_1 - \frac{3}{2}$$

puis en dérivant l'expression et en prenant $t = 0$

$$y'(0) = 0 = -\frac{1}{2}c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}s_1.$$

d'où $c_1 = \frac{3}{2}$ et $s_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et finalement

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} \left(3\cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3}\sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) - \frac{3}{2}.$$