Préparation à l'agrégation
Epreuve de modélisation

La valorisation des actifs financiers conditionnels: le modèle binomial

\- - - - - - -

1 Les actifs conditionnels.

Des contrats sur des marchandises existaient déjà dans l'Antiquité mais les premiers vrais contrats d'option sont apparus sur les marchés des céréales en Europe au XIXème siècle. Il s'agissait de contrats de gré à gré signés entre producteurs et négociants. Les agriculteurs pouvaient ainsi planifier un revenu plancher plusieurs mois à l'avance en s'assurant contre une chute brutale des cours. Considérons un actif, coté sur un marché supposé parfaitement liquide, c'est-à-dire exclusivement soumis aux lois de l'offre et de la demande, abritant un volume important de transactions et dans lequel aucun intervenant n'a un poids suffisant pour influer notablement sur la cotation ou ne dispose d'informations privilégiées; cet actif peut être une action, une obligation ou un taux d'intérêt, mais aussi un taux de change, un indice boursier ou un matière première.

Une *option* est un contrat qui permet à son détenteur d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un bien ou d'un actif à un cours convenu à l'avance, appelé *le prix d'exercice*, à (ou jusqu'à) une date fixée, dite échéance de l'option. En contrepartie, l'acheteur verse immédiatement au vendeur de l'option une prime qui est le *prix de l'option*. Les options européennes sont les options exercées seulement le jour de l'échéance, les options américaines celles qui peuvent être exercées à tout moment avant leur échéance.

2 Le modèle binomial de Cox-Ross-Rubinstein.

On considère un marché financier en horizon fini N constitué par deux actifs. L'un est sans risque de rendement certain r sur une période; sa valeur à l'instant n vaut: $S_n^0 = (1+r)^n$, pour $n = 0, \ldots, N$.

L'autre est risqué de prix S_n à l'instant n, pour $n = 0, \ldots, N$. On suppose qu'entre deux cotations, le cours de cet actif risqué est multiplié soit par $1+a$, soit par $1+b$, avec $-1 < a < b$. Son prix initial S_0 est une donnée. L'espace des états de la nature est noté $\Omega = \{1+a, 1+b\}^N$, chaque N-uple représentant les valeurs successives de $T_{n+1} = S_{n+1}/S_n, n = 0, \ldots, N-1$. On pose

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 &= (\emptyset, \Omega) \\ \mathcal{F}_n &= \sigma(S_1, \ldots, S_n) \quad = \quad \sigma(T_1, \ldots, T_n) \qquad 1 \leq n \leq N \, . \end{aligned}$$

On note

$$\tilde{S}_n = \frac{S_n}{(1+r)^n} \quad n = 0, \ldots, N \, ,$$

et on appelle $\tilde{S}_n$ le *prix actualisé* à l'instant n de l'actif risqué.

Exercice 1 : *Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}_N)$. Montrer que $(\tilde{S}_n)$ est une martingale sur $(\Omega, (\mathcal{F}_n), \mathbb{P})$ si et seulement si*

$$\mathbb{E}[T_{n+1} | \mathcal{F}_n] = 1 + r \quad n = 0, \ldots, N-1 \, .$$

3 Stratégies admissibles et arbitrage.

Une *stratégie de gestion* est la donnée ϕ d'une richesse initiale V_0 $\mathcal{F}_0$-mesurable et d'une suite aléatoire $((\phi_n^0, \phi_n); n = 1, \ldots, N)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ donnant à chaque instant $n \geq 1$ les quantités ϕ_n^0, ϕ_n des deux actifs dans le portefeuille d'un investisseur. On impose à la suite (ϕ_n^0, ϕ_n) d'être prévisible au sens où pour $1 \leq n \leq N$, ϕ_n^i et ϕ_n sont $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurables. La signification de cette hypothèse est la suivante: le portefeuille (ϕ_n^0, ϕ_n) à la date n est constitué au vu des informations disponibles à la date $n-1$ et conservé tel quel au moment des cotations à la date n. Par contre on n'impose pas à ϕ_n^0 et ϕ_n d'être positifs car les emprunts et ventes à découvert sont autorisés.

La *valeur* du portefeuille à l'instant $n \geq 1$ est donnée par $V_n(\phi) = \phi_n^0 S_n^0 + \phi_n S_n$ et sa *valeur actualisée* est $\tilde{V}_n(\phi) = \phi_n^0 + \phi_n \tilde{S}_n$. On pose de plus $V_0(\phi) = \tilde{V}_0(\phi) = V_0$. Une stratégie de gestion ϕ est dite *autofinancée* si pour tout $n \in \{0, \ldots, N-1\}$, on a

$$V_n(\phi) = \phi_{n+1}^0 S_n^0 + \phi_{n+1} S_n \ .$$

Exercice 2 : *Montrer qu'une stratégie de gestion ϕ est autofinancée si et seulement si pour tout $n \in \{0, \ldots, N-1\}$, on a*

$$\tilde{V}_{n+1}(\phi) = \tilde{V}_n(\phi) + \phi_{n+1}(\tilde{S}_{n+1} - \tilde{S}_n) \ .$$

Exercice 3 : *Montrer que pour toute richesse initiale V_0 et toute suite prévisible $(\phi_n, 1 \leq n \leq N)$, il existe une et une seule suite prévisible $(\phi_n^0, 1 \leq n \leq N)$ telle que la stratégie de gestion $\phi = (V_0, (\phi_n^0, \phi_n))$ soit autofinancée.*

Une stratégie est dite *admissible* si elle est autofinancée et si $V_n(\phi) \geq 0$ pour tout $n = 0, \ldots, N$. La notion d'*arbitrage* (réalisation d'un profit sans risque) est formalisée de la façon suivante: une *stratégie d' arbitrage* est une stratégie admissible de valeur initiale nulle et de valeur finale $V_N(\phi)$ non identiquement nulle. On dit qu'un marché est *viable* s'il n'existe pas de stratégie d'arbitrage.

Exercice 4 : *Montrer que si $r \leq a$ ou $r \geq b$, le marché n'est pas viable.*

Exercice 5 : *On suppose $a < r < b$ et on pose $p = (b-r)/(b-a)$. Montrer que $\tilde{S}_n$ est une martingale sur $(\Omega, (\mathcal{F}_n), \mathbb{P})$ si et seulement si les variables aléatoires $T_1, \ldots, T_N$ sont indépendantes équidistribuées de loi commune*

$$\mathbb{P}(T_1 = 1 + a) = p = 1 - \mathbb{P}(T_1 = 1 + b) \ .$$

Quelle est alors la valeur de $\mathbb{P}(\{\omega\})$ pour chaque $\omega \in \Omega$? Montrer que dans ce cas la suite $(\tilde{V}_n(\phi), 0 \leq n \leq N)$ est une martingale pour toute stratégie ϕ autofinancée.

Exercice 6 : *Montrer que si $a < r < b$, le marché est viable.*

On suppose désormais $a < r < b$.

4 Evaluation et couverture des actifs conditionnels

.

On appelle *actif conditionnel*, ou *option européenne*, d'échéance N, une variable aléatoire $h \geq 0$, $\mathcal{F}_N$-mesurable, représentant le profit que permet l'exercice de l'option. Par exemple, pour une option d'achat (call) sur une unité de l'actif risqué au prix d'exercice K, on a $h = (S_N - K)_+$; pour une option de vente (put) sur une unité de l'actif risqué au prix d'exercice K, on a $h = (K - S_N)_+$.

Exercice 7 : *On note $\mathbb{E}$ l'espérance par rapport à la probabilité $\mathbb{P}$ de l'exercice 5. Montrer que pour tout $n \in \{1, \ldots, N\}$ et toute variable aléatoire g $\mathcal{F}_n$-mesurable, il existe une variable aléatoire f $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable telle que $g - \mathbb{E}[g|\mathcal{F}_{n-1}] = f(p\mathbf{1}_{\{T_n=1+b\}} - (1-p)\mathbf{1}_{\{T_n=1+a\}})$.*

Exercice 8 : *Soit h une variable aléatoire positive $\mathcal{F}_N$-mesurable. Montrer qu'il existe une et une seule stratégie admissible ϕ vérifiant $V_N(\phi) = h$.*

On dit alors que l'actif conditionnel défini par h est *dupliqué* ou *simulé* par la stratégie ϕ. La quantité $V_n(\phi)$ est appelée la *valeur de l'actif conditionnel* à l'instant n: c'est la richesse qui détenue à l'instant n permet en suivant la stratégie ϕ à partir de cet instant de retrouver la richesse promise h à l'instant N. Si, à l'instant 0, l'investisseur vend l'option au prix $\mathbb{E}[h](1+r)^{-N}$, il a la possibilité, en suivant la stratégie duplicative ϕ, de retrouver la richesse promise h à l'instant N, c'est-à-dire qu'il peut *se couvrir parfaitement*.

On note C_n (resp. P_n) la valeur à l'instant n de l'option d'achat (resp. de vente) sur une unité de l'actif risqué au prix d'exercice K et d'échéance N.

Exercice 9 : *Montrer que pour $0 \leq n \leq N$, $C_n - P_n = S_n - K(1+r)^{-(N-n)}$.*

Exercice 10 : *Montrer que $C_n = c(n, S_n)$ où*

$$c(n,x) = \frac{1}{[(b-a)(1+r)]^{N-n}} \sum_{j=0}^{N-n} C_{N-n}^{j} (b-r)^j (r-a)^{N-n-j} (x(1+a)^j(1+b)^{N-n-j} - K)_+$$

Exercice 11 : *Montrer que la stratégie de couverture parfaite d'une option d'achat est définie par une quantité d'actif risqué $\phi_n = \Delta(n, S_{n-1})$ à détenir à l'instant n pour $1 \leq n \leq N$, où*

$$\Delta(n,x) = \frac{c(n, x(1+b)) - c(n, x(1+a))}{x(b-a)}$$

Exercice 12 : *Simuler une trajectoire du prix de l'actif risqué et représenter sur un même graphique son évolution, celles de l'option d'achat et de l'option de vente associées, ainsi que celle de la stratégie de couverture parfaite.*