M1 - S8 - Probabilités 2 - CC2 - 2020-2021

Cadre. On note $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ l'espace probabilisé sur lequel on travaille.

Exercice 1 (Définitions).

1. Soit X une variable aléatoire intégrable. Soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Donner la définition de $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.
2. Soit $(\mathcal{F}_n)_n$ une filtration. Donner la définition d'une martingale relativement à cette filtration.

Exercice 2 (Temps d'arrêt). Dans cet exercice, on demande de redémontrer des propriétés liées aux temps d'arrêt qui ont été vues en cours. On fixe une filtration $(\mathcal{F}_n)_n$. Dans la suite la notion de temps d'arrêt est relative à cette filtration.

1. Soit $(X_n)_n$ un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$. Soit A un sous-ensemble borélien de $\mathbb{R}$. On considère T^A le temps d'atteinte de A par X. Ainsi
$$T^A = \min\{n \geq 0 : X_n \in A\} \text{ s'il existe } n \text{ tel que } X_n \in A \text{ et } T^A = \infty \text{ sinon.}$$
Montrer que T^A est un temps d'arrêt.
2. Montrer que le minimum $S \wedge T$ de deux temps d'arrêts S et T est encore un temps d'arrêt.
3. Le maximum $S \vee T$ de deux temps d'arrêts S et T est-il toujours un temps d'arrêt ?

Exercice 3. Soient X, Y et Z des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[-1, 1]$. On pose $A = (X + Y + Z)^2$. Calculer $\mathbb{E}[A|X]$.

Exercice 4. Soit (X, Y) un couple de variable aléatoire de loi $f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où
$$f(x, y) = x(y - x)e^{-y}\mathbb{1}_{\{0 \leq x \leq y\}}.$$
On rappelle que, pour tout entier $n \geq 0$, on a
$$n! = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\mathrm{d}x.$$

1. Expliciter f_X la densité de la loi de X.
2. Donner $\mathbb{E}[X]$.
3. Expliciter f_Y la densité de la loi de Y.
4. Donner $\mathbb{E}[Y]$.
5. Expliciter $\mathbb{E}[X|Y]$ et vérifier que c'est compatible avec les résultats des questions 2 et 4.
6. Expliciter $\mathbb{E}[Y|X]$ et vérifier que c'est compatible avec les résultats des questions 2 et 4.

Exercice 5. Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.i.i.d. On suppose, pour tout n, $\mathbb{P}[X_n = 1] = \mathbb{P}[X_n = -1] = 1/2$. On note $(\mathcal{F}_n)_n$ la filtration naturelle associée à ce processus. On travaille dans la suite avec cette filtration. On note $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles des $(X_n)_n$. Ainsi, $S_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$,
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$
On se donne $a < 0 < b$ deux entiers. On note T^a le temps d'atteinte de a par le processus $(S_n)_n$. On note T^b le temps d'atteinte de b et $T = T^a \wedge T^b$ le temps d'atteinte de $\{a, b\}$.

1. Montrer que $(S_n)_n$ est une martingale.
2. En considérant le processus $S_{n\wedge T}$ montrer que T est presque sûrement fini puis obtenir la valeur de $\mathbb{P}[T^a < T^b]$.
3. Pour tout $n \geq 0$ on pose $M_n = S_n^2 - n$. Montrer que M_n est une martingale.
4. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[T]$.

Exercice 6. Soit $(M_n)_n$ une martingale positive relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$. Soient $0 \leq p \leq q$ deux entiers. Montrer l'inclusion presque sûre suivante :
$$\{X_p = 0\} \subset \{X_q = 0\}.$$

Exercice 7 (Inégalité d'Efron-Stein). Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application mesurable. On définit une variable aléatoire Z par

$$Z = f(X_1, \dots, X_n).$$

On suppose que Z est de carré intégrable. On s'intéresse à sa variance. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on pose

$$\mathcal{F}_i = \sigma(X_1, \dots, X_i)$$

et

$$\mathcal{G}^i = \sigma(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n).$$

Autrement dit $\mathcal{F}_i$ est la tribu engendrée par les X_k pour $k \leq i$ tandis que $\mathcal{G}^i$ est la tribu engendrée par les X_k pour $k \neq i$. On pose par ailleurs $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

1. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on pose

$$\Delta_i = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_i] - \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_{i-1}].$$

La plupart des questions de cette partie sont contenues dans le cours (ou proches du cours) mais on en demande néanmoins une démonstration.

(a) Expliquer en quelques lignes pourquoi on a

$$Z - \mathbb{E}[Z] = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i.$$

(b) Montrer que les Δ_i sont de carré intégrable.

(c) Montrer que les Δ_i sont deux à deux orthogonaux (c'est-à-dire que $\mathbb{E}[\Delta_i \Delta_j] = 0$ pour tout $i \neq j$).

(d) En déduire

$$\operatorname{var}(Z) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\Delta_i^2].$$

2. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$.

(a) Montrer

$$\mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_i] = \int_{\mathbb{R}^{n-i}} f(X_1, \dots, X_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \mathrm{d}P_{X_{i+1}}(x_{i+1}) \dots \mathrm{d}P_{X_n}(x_n).$$

On pourra utiliser le théorème de Fubini.

(b) Donner, sans démonstrations, une formule similaire pour $\mathbb{E}[Z|\mathcal{G}^i]$.

(c) En déduire

$$\mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_{i-1}] = \mathbb{E}[Z^i|\mathcal{F}_i] \text{ où } Z^i = \mathbb{E}[Z|\mathcal{G}^i]$$

puis

$$\Delta_i = \mathbb{E}[Z - Z^i|\mathcal{F}_i].$$

3. En déduire [1]

$$\operatorname{var}(Z) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[(Z - Z^i)^2].$$

4. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on se donne une variable aléaoire $\overline{X}_i$ indépendante de $(X_1, \dots, X_n)$ et de même loi que X_i puis on pose

$$\overline{Z}_i = f(X_1, \dots, X_{i-1}, \overline{X}_i, X_{i+1}, \dots, X_n).$$

Déduire de la question précédente que l'on a également [2]

$$\operatorname{var}(Z) \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[(Z - \overline{Z}_i)^2] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[(Z - \overline{Z}_i)_+^2] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[(Z - \overline{Z}_i)_-^2].$$

Indices : montrer et utiliser le fait que, si A et B sont deux v.a.i.i.d. de carré intégrable alors $\operatorname{var}(A) = \frac{1}{2}\mathbb{E}[(A - B)^2]$; utiliser un argument de symétrie.

1. C'est une formulation de l'inégalité d'Efron-Stein.
2. Ce sont d'autres formulations de l'inégalité d'Efron-Stein.