L3 - Intégration II - 2016/2017 - CC1

Remarques et conventions. Sauf mention du contraire, j'attends des démonstrations précises et claires à chaque question. Je rappelle que votre copie n'est pas votre brouillon. Sauf mention du contraire, les intervalles de $\mathbb{R}$ sont munis de la tribu des boréliens et de la mesure de Lebesgue. Le sujet est long. Le barème en tiendra compte. Privilégiez la qualité à la quantité.

Exercice 1 (Question de cours).

1. Rappeler la définition de « mesure ».
2. Énoncer les inégalités de Hölder.

Exercice 2 (Questions rapides). Répondre aux questions suivantes sans donner de justifications.

1. Donner un exemple d'application f appartenant à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ mais pas à $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.
2. Donner un exemple d'une suite d'applications mesurables $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui converge presque partout vers une application mesurable f sans qu'il y ait convergence dans L^1.

Exercice 3. On considère l'application $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + x}.$$

Pour quelles valeurs de $p \in [1, +\infty[$ l'application appartient-elle à $\mathcal{L}^p(]0, +\infty[)$?

Exercice 4. On pose $I =]0, +\infty[$. Soit $f :]0, 1[\times I \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x, t) = \frac{x^{t-1}}{1 + x}.$$

1. Montrer que, pour tout $t \in I$, l'application de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto f(x, t)$ est intégrable. On définit alors une application $\phi : I \to \mathbb{R}$ par
$$\phi(t) = \int_0^1 f(x, t) dx.$$
2. Montrer que ϕ est continue.
3. Quelle est la limite de ϕ en $+\infty$?
4. Soit $t \in I$. Que vaut $\phi(t) + \phi(t+1)$? En déduire la limite de ϕ en 0 et donner un équivalent simple (de la forme at^b pour des réels a et b à préciser) de ϕ en 0.

Exercice 5. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une application de carré intégrable (autrement dit, $f \in \mathcal{L}^2([0, 1])$).

1. Montrer, pour tout entier $n \geq 1$, l'inégalité
$$\int_0^1 x^n |f(x)| dx \leq \frac{1}{\sqrt{2n + 1}} \|f\|_2.$$
2. Montrer que l'application $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par
$$\phi(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} |f(x)|$$
est intégrable.

3. Montrer l'égalité suivante

$$\int_0^1 f(x)\ln(1/(1-x))dx = \sum_{n\geq 1} \int_0^1 \frac{x^n}{n} f(x)dx.$$

(Montrer en particulier que les deux membres ont un sens.)

Exercice 6 (Question proche du cours [1]). Soient f et g deux applications de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On fait les hypothèses suivantes.

— f est continue et g est mesurable.

— $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Montrer que f est intégrable si et seulement il existe $M > 0$ tel que g est intégrable sur $[M,+\infty[$.

Exercice 7 (Question proche du cours [1]). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application mesurable. On fait les hypothèses suivantes.

— Pour tout réel x, $|f(x)| \leq 1$.

— $f(0) = 1$.

— f est continue en 0.

Montrer que $\|f\|_\infty = 1$.

1. Ce type de résultats peut être utilisé directement dans les autres exercices.