L3 - Intégration II - 2015/2016 - CC1

Remarques et conventions. Sauf mention du contraire, j'attends des démonstrations précises et claires à chaque question. Je rappelle que votre copie n'est pas votre brouillon. Sauf mention du contraire, les intervalles de $\mathbb{R}$ sont munis de la tribu des boréliens et de la mesure de Lebesgue.

Exercice 1 (questions de cours). Soit (X, τ, μ) un espace mesuré.

1. Donner la définition de $\mathcal{L}^p(X, \tau, \mu)$ pour $1 \leq p < +\infty$.
2. Donner la définition de $\mathcal{L}^\infty(X, \tau, \mu)$.
3. Énoncer le théorème de convergence dominée dans $\mathcal{L}^1(X, \tau, \mu)$.

Exercice 2 (questions rapides). Répondre aux questions suivantes sans donner de justifications.

1. Donner un exemple d'application f de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ qui n'appartient pas à $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.
2. Donner un exemple d'application f de $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ qui n'appartient pas à $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.
3. Donner un exemple d'application f de $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\|f\|_\infty$ ne soit pas égale à $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ et préciser la valeur de ces deux quantités dans l'exemple proposé.

Exercice 3. On considère l'application $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^{1/3} + x^{2/3}}.$$

Pour quelles valeurs de $p \in [1, +\infty]$ l'application appartient-elle à $\mathcal{L}^p([0, +\infty[)$?

Exercice 4. On pose $I =]0, +\infty[$. Soit $f : I^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x, t) = \frac{e^{-tx}}{1 + x}.$$

1. Montrer que, pour tout $t > 0$, l'application de I dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto f(x, t)$ est intégrable. On définit alors une application $\phi : I \to \mathbb{R}$ par
$$\phi(t) = \int_I f(x, t) dx.$$
2. Montrer que ϕ est dérivable. On pourra commencer par étudier, pour tout $a > 0$, la dérivabilité de la restriction de ϕ à l'intervalle $[a, +\infty[$.

Exercice 5. On définit une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en posant, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x,

$$f_n(x) = \sqrt{n}\mathbb{1}_{[-1/n,1/n]}(x).$$

1. La suite converge-t-elle presque partout ?
2. Soit $p \in [1, +\infty[$. La suite converge-t-elle dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$?
3. La suite converge-t-elle dans $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$?

Exercice 6.

1. Existe-t-il une application continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f = 1_{\{0\}}$ presque partout ?
2. Existe-t-il une application continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f = 1_\mathbb{Z}$ presque partout ?
3. Existe-t-il une application continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f = 1_{[0,1]}$ presque partout ?
4. Soit $(f_n)_n$ une suite de $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ qui converge dans $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ vers $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que $(f_n)_n$ converge presque partout vers f.