L3 - Intégration I - 2017/2018 - CC1

Remarques. Sauf mention du contraire, j'attends des démonstrations précises et claires à chaque question. Je rappelle que votre copie n'est pas votre brouillon.

Questions de cours.

1. Donner la définition d'une mesure.
2. Énoncer le théorème de convergence monotone.

Exercice 1. Pour tout entier $n \geq 1$ on considère l'application $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}.$$

Étudier la limite de la suite $(u_n)_n$ définie par

$$u_n = \int_{\mathbb{R}_+} f_n(x)dx.$$

Exercice 2. On pose $X = \mathbb{R}_+$ et $I = \mathbb{R}_+^*$. Soit $f : I \times X \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t,x) = \cos(x)e^{-tx}.$$

Étudier (définition, continuité, dérivabilité et formule pour la dérivée) la fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(t) = \int_X f(t,x)dx.$$

Problème. Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. On pose

$$-A = \{-a, \quad a \in A\}$$

et

$$A - B = \{a - b, \quad a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

Par exemple,

$$-\{10, 11\} = \{-10, -11\}$$

et

$$\{10, 11\} - \{1, 2\} = \{8, 9, 10\}.$$

L'objectif de ce problème est de donner une condition suffisante sur A pour que $A - A$ contienne un intervalle de longueur non nulle. On rappelle que, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application, alors

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

On admet, pour toute application mesurable et positive $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et pour tout réel x, l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)dt.$$

1. $\mathbb{Q} - \mathbb{Q}$ contient-il un intervalle de longueur non nulle ?

2. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de longueur non nulle.
   (a) Montrer que $A - A$ contient un intervalle de longueur non nulle.
   (b) La mesure de Lebesgue de A est-elle non nulle ?
3. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications mesurables et positives. Soit $x \in \mathbb{R}$. On admet que le produit de deux applications mesurables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est mesurable. Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = f(t)g(x-t)$$
   est mesurable et positive. Cela permet de définir une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, que l'on note $f * g$, par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt.$$
4. Soient A et B deux sous-ensembles boréliens bornés de $\mathbb{R}$.
   (a) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue, positive et à support compact. Montrer que $1_A * g$ est continue.
   (b) On admet l'existence d'une suite $(g_n)_n$ d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues, positives et à support compact telle que
$$\lim_{n\to\infty} \|1_B - g_n\|_1 = 0.$$
   Montrer
$$\lim_{n\to\infty} \|1_A * 1_B - 1_A * g_n\|_\infty \to 0.$$
   (c) Déduire des questions précédentes que $1_A * 1_B$ est continue.
5. Soit A un sous-ensemble borélien borné de $\mathbb{R}$. On suppose que la mesure de Lebesgue de A est non nulle.
   (a) Montrer que $-A$ est un sous-ensemble borélien borné de $\mathbb{R}$.
   (b) Que vaut $1_A * 1_{-A}(0)$?
   (c) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tels que, pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$, $1_A * 1_{-A}(x) > 0$.
   (d) Montrer que, pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \in A$ et $x - t \in -A$.
   (e) En déduire que $A - A$ contient un intervalle de longueur non nulle.
   (f) Le résultat précédent reste-t-il vrai si l'on suppose simplement que A est un sous-ensemble borélien de $\mathbb{R}$ (non nécessairement borné) ?