Rejet

février 2011 - v0 non débuguée ; mars 2017 - v1 non relue sérieusement

1 Un exemple

Problème. On lance un dé jusqu'à obtenir un nombre inférieur à 5. Nombre de lancers ? Loi du résultat obtenu lors du dernier lancer ?

Modélisation. On se donne une suite de v.a.i.i.d. $(X_n)_n$ de loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, 6\}$. On note T le premier indice n pour lequel on a $X_n \leq 5$. Loi de T ? Loi de X_T ?

Proposition 1 *La v.a. T suit une loi géométrique de paramètres $5/6$. La v.a. X_T suit une loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, 6\}$.*

Preuve. Le premier résultat est bien connu. Montrons le deuxième. Comme T est p.s. un entier strictement positif, on a, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, 5\}$,

$$\begin{aligned}
P(X_T = k) &= \sum_{n \geq 1} P(X_T = k \text{ et } T = n) \\
&= \sum_{n \geq 1} P(X_n = k \text{ et } T = n) \\
&= \sum_{n \geq 1} P(X_n = k \text{ et } X_1 \notin \{1, 2, \ldots, 5\}, \ldots, X_{n-1} \notin \{1, 2, \ldots, 5\}) \\
&= \sum_{n \geq 1} P(X = k) P(X \notin \{1, 2, \ldots, 5\})^{n-1} \\
&= \frac{P(X = k)}{1 - P(X \notin \{1, 2, \ldots, 5\})} \\
&= \frac{P(X = k)}{P(X \in \{1, 2, \ldots, 5\})} \\
&= \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

Cela conclut la preuve. □

Remarque. Pour tout $k \in \{1,\dots,5\}$, on a

$$P(X_T = k) = \frac{P(X=k)}{P(X \in \{1,2,\dots,5\})} = P(X = k | X \in \{1,2,\dots,5\}).$$

La loi uniforme sur $\{1,2,\dots,5\}$ est la loi d'une variable uniforme sur $\{1,2,\dots,6\}$ conditionnée à appartenir à $\{1,2,\dots,5\}$.

2 Un résultat général

En reprenant quasiment à l'identique la preuve précédente, on obtient le résultat suivant.

Théorème 1 *Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Soit A un borélien de $\mathbb{R}^d$ tel que $P(X \in A)$ soit non nul. Soit T le premier indice tel que X_n appartiennent à A. Alors :*

1. *La v.a. T suit une loi géométrique de paramètre $P(X \in A)$.*
2. *La v.a. X_T suit la loi de X conditionnée à appartenir à A. Autrement dit, pour tout borélien B de $\mathbb{R}^d$, on a :*

$$P(X_T \in B) = P(X \in B | X \in A).$$

Preuve. Le premier point est bien connu. Montrons le deuxième. Nous pourrions imiter la preuve précédente mais nous préférons en donner une présentation très légèrement différente. On a, pour tout borélien B et tout entier $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
P(X_T \in B | T = n) &= \frac{P(X_T \in B \text{ et } T = n)}{P(T=n)} \\
&= \frac{P(X_n \in B \text{ et } T = n)}{P(T=n)} \\
&= \frac{P(X_n \in B \cap A \text{ et } X_1 \notin A, \dots, X_{n-1} \notin A)}{P(T=n)} \\
&= \frac{P(X \in B \cap A) P(X \notin A)^{n-1}}{P(T=n)} \\
&= \frac{P(X \in B | X \in A) P(X \in A) P(X \notin A)^{n-1}}{P(T=n)} \\
&= P(X \in B | X \in A).
\end{aligned}$$

On en déduit, pour tout borélien B,

$$\begin{aligned}
P(X_T \in B) &= \sum_{n \geq 1} P(X_T \in B | T = n) P(T = n) \\
&= \sum_{n \geq 1} P(X \in B | X \in A) P(T = n) \\
&= P(X \in B | X \in A).
\end{aligned}$$

Cela conclut la preuve. □

Méthode de rejet. Soit ν une loi sur $\mathbb{R}^d$ que l'on sait simuler. Soit μ une loi sur $\mathbb{R}^d$ que l'on cherche à simuler. On suppose que μ s'obtient à partir de ν par un conditionnement. Plus spécifiquement, on suppose qu'il existe un borélien A tel que $\nu(A)$ est non nul et tel que, pour tout borélien B, on a

$$\mu(B) = \frac{\nu(B \cap A)}{\nu(A)}.$$

Pour obtenir une réalisation y d'une v.a. de loi μ, il suffit alors de simuler un échantillon $x_1, x_2, \ldots$ de v.a. de loi ν et de prendre pour y la première valeur appartenant à A. Le nombre moyen de x_i qu'il faut simuler pour obtenir un y est $1/\nu(A)$.

Exemples d'applications.
- Simuler une variable uniforme sur $\{1, 2, \ldots, 5\}$ en sachant simuler une v.a. uniforme sur $\{1, 2, \ldots, 6\}$.
- Simuler un dérangement (permutation sans point fixe) aléatoire uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$.
- Dans le texte ising2009 le cadre est le suivant. On considère une mesure produit μ sur l'espace $\{-1, 0, 1\}^\Lambda$ pour un certain ensemble Λ. On se donne un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\{-1, 0, 1\}^\Lambda$ et on cherche à simuler la loi ν définie par

  $$\nu(B) = \frac{\mu(B \cap \mathcal{A})}{\mu(\mathcal{A})}.$$

  La mesure produit μ étant facile à simuler, la méthode de rejet est une méthode de simulation possible de ν. Elle est cependant très peu efficace ici car $\mu(\mathcal{A})$ est très petit. Le texte porte précisément sur des méthodes de simulation alternatives.

3 Un cas particulier important

Théorème 2 *Soient f et g deux densités de probabilités sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une constante c telle que*

$$g \leq cf.$$

Soien U une v.a. uniforme sur $[0, 1]$ et X une v.a. de loi de densité f. On suppose U et X indépendantes. Alors, la loi de X conditionnellement à $cUf(X) \leq g(X)$ est la loi de densité g. Autrement dit, pour tout borélien B,

$$P\big(X \in B | cUf(X) \leq g(X)\big) = P(Y \in B)$$

où Y est une v.a. de loi de densité g.

Idées de la preuve. Le couple $(X, Ucf(X))$ suit une loi uniforme sur

$$A_{cf} = \{(x, t) : 0 \leq t \leq cf(x)\}.$$

En effet, le couple est à valeur dans l'ensemble précédent et, pour (x, t) dans cet ensemble, on a

$$P\big((X, Ucf(X)) \approx (x, t)\big) \approx f(x)dx \frac{dt}{cf(x)} = \frac{dxdt}{c}.$$

Posons
$$A_g = \{(x,t) : 0 \le t \le g(x)\}.$$
Si un couple (Y,V) suit une loi uniforme sur l'ensemble précédent, alors Y suit une loi de densité g. En effet
$$P(Y \approx y) \approx \frac{1}{\int g}\, g(y)dy = g(y)dy.$$
Remarquons $A_g \subset A_{cf}$. Par conséquent la loi de $(X, cUf(X))$ conditionnellement à appartenir à A_g est la loi uniforme sur A_g. Cela permet de conclure grâce à la discussion précédente. $\square$

Exercice. Prouver le théorème précédent.

Méthode de rejet. Soient f et g sont deux densités de probabilités telles que
$$g \le cf$$
pour une constante $c > 0$. Pour obtenir une réalisation y d'une v.a. de loi de densité g, il suffit de simuler un échantillon $x_1, x_2, \dots$ de v.a. de loi de densité f et un échantillon indépendant $u_1, u_2, \dots$ de v.a. uniformes sur $[0,1]$. On considère alors le premier couple (x_n, u_n) tel que $cu_nf(x_n) \le g(x_n)$ puis on pose $y = x_n$.

Remarque. Avec cette méthode, le nombre moyen d'essais nécessaires est c.