Processus de Poisson sur la droite

février 2011 - v0 non débuguée, février 2017 - v0.9 non relue sérieusement

1 Espace d'état

1.1 Description informelle

On cherche à modéliser un ensemble d'instants aléatoires : par exemple les instants où l'un des atomes radioactifs d'un matériau se désintègre, les instants où un serveur informatique reçoit une requête etc. On se limite ici à des instants strictement positifs. On peut décrire cet ensemble d'instants aléatoires en se donnant, au choix :

— L'ensemble des instants aléatoires.
— La suite ordonnées des instants aléatoires.
— La suite des intervalles de temps entre instants aléatoires successifs.
— Le processus de comptage, i.e. la donnée pour tout t du nombre d'instants aléatoires inférieurs ou égaux à t.

Ces différents points de vue ont chacun leur intérêt. Dans la suite de cette section nos formalisons ce qui précède.

1.2 Espaces d'état

L'espace des instants. On pose :

$$\mathcal{S} = \{S \subset]0, +\infty[: S \text{ est infini et } S \cap [0, t] \text{ est fini pour tout } t \geq 0\}.$$

La suite ordonnée des instants. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des suites $(T_i)_{i\geq 1}$ strictement croissantes de réels strictement positifs tendant vers l'infini. L'application

$$\begin{cases} \mathcal{T} & \to \mathcal{S} \\ (T_i)_{i\geq 1} & \mapsto \{T_i, i \geq 1\} \end{cases}$$

est une bijection.

La suite des intervalles de temps entre instants successifs. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des suites $(D_i)_{i\geq 1}$ de réels strictement positifs de somme infinie. L'application

$$\begin{cases} \mathcal{D} & \to \mathcal{T} \\ (D_i)_{i\geq 1} & \mapsto (D_1, D_1 + D_2, D_1 + D_2 + D_3, \dots) \end{cases}$$

est une bijection.

Comptage. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des applications $N : [0, +\infty[\to \mathbb{N}$ qui valent 0 en 0, qui sont croissantes par sauts d'amplitude 1, continues à droite et qui tendent vers l'infini en l'infini. L'application

$$\begin{cases} \mathcal{S} & \to \mathcal{N} \\ S & \mapsto N \end{cases}$$

où N est définie par

$$N(t) = \operatorname{card}(S \cap [0, t])$$

est une bijection.

Remarques.

1. En posant $T_0 = 0$ on a, pour tout entier $n \geq 0$:

$$N(t) = n \text{ si et seulement si } T_n \leq t < T_{n+1}.$$

2. Pour tout $0 \leq t < t'$, on a :

$$N(t') - N(t) = \operatorname{card}(S \cap]t, t']).$$

2 Tribus

2.1 Description minimaliste

Nous allons considérer des variables aléatoires à valeurs dans les ensembles précédents. Nous avons donc besoin de définir des tribus adéquates sur ces ensembles. Avec ces tribus, la donnée d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{N}$ reviendra simplement à la donnée d'une famille $N = (N(t))_{t \geq 0}$ de variables aléatoires réelles telle que N est à valeurs dans $\mathcal{N}$. On appellera une telle famille de variables aléatoires un processus de comptage. La donnée d'une variable aléatoire dans $\mathcal{T}$ reviendra similairement à la donnée d'une suite $T = (T(i))_{i \geq 1}$ de variables aléatoires telle que T est à valeurs dans $\mathcal{T}$. Il en est de même pour $\mathcal{D}$. On peut par ailleurs passer d'un point de vue à l'autre. Par exemple si N est un processus de comptage, alors la suite $(T(n))_n$ des temps associés est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{T}$.

2.2 Tribus

$\mathcal{S}$**.** On munit $\mathcal{S}$ de la tribu engendrée par la famille d'applications

$$\begin{cases} \mathcal{S} & \to \mathbb{N} \\ S & \mapsto \operatorname{card}(S \cap [0, t]) \end{cases}$$

où t décrit $[0, +\infty[$. C'est aussi la tribu engendrée par la famille d'applications

$$\begin{cases} \mathcal{S} & \to \mathbb{N} \\ S & \mapsto \operatorname{card}(S \cap A) \end{cases}$$

où A décrit les sous-ensembles boréliens bornés de $[0, +\infty[$.

$\mathcal{T}, \mathcal{D}, \mathcal{N}$. Ces ensembles sont des parties d'un espace produit. On les munit de la tribu induite par la tribu produit. Ainsi la tribu sur $\mathcal{N}$ est simplement la tribu engendrée par la famille d'applications

$$\begin{cases} \mathcal{N} & \to \mathbb{N} \\ N & \mapsto N(t) \end{cases}$$

où t décrit $[0, +\infty[$. Ainsi, une application N à valeurs dans $\mathcal{N}$ muni de la tribu précédente est mesurable si et seulement $N(t)$ est mesurable pour tout $t \geq 0$. Ce n'est donc rien d'autre que la donnée d'une famille $N = (N(t))_{t\geq 0}$ de variables aléatoires telle que N est à valeurs dans $\mathcal{N}$.

Équivalence des points de vue. Les bijections décrites dans la section précédente sont mesurables ainsi que leur réciproque.

3 Processus de Poisson homogène

3.1 Description intuitive

Intuitivement, un processus de Poisson homogène d'intensité $\lambda > 0$ sur $]0, +\infty[$ est un sous-ensemble aléatoire de $]0, +\infty[$ satisfaisant les deux propriétés suivantes :

— La probabilité qu'il y ait un point dans un intervalle infinitésimal $[x, x + dx]$ est λdx.

— Les restrictions du sous-ensemble aléatoire à deux régions disjointes sont indépendantes.

Nous donnons dans la suite des définitions précises dans lesquelles nous verrons apparaître des lois de Poisson et des lois exponentielles. Nous pouvons dès à présent, en restant au niveau heuristique, comprendre pourquoi ces lois apparaissent.

Soit $n \geq 1$ un grand entier. Soit $s > 0$ un réel. Le nombre de points de notre ensemble aléatoire dans l'intervalle $[0, s[$ est approximativement (pour n assez grand) :

$$\sum_{i=1}^{n} 1_{\{\text{un point dans }](i-1)s/n, is/n]\}}.$$

Cela suit donc approximativement (pour n assez grand) une loi binomiale de paramètres n et $\lambda s/n$. Cela suit donc approximativement (pour n assez grand) une loi de Poisson de paramètre λs. Ainsi le nombre de points de notre ensemble aléatoire dans l'intervalle $[0, s[$ suit une loi de Poisson de paramètre λs.

Soit $n \geq 1$ un grand entier. Soit $s > 0$ un réel. Le premier point de notre ensemble est T_1. On a

$$\begin{aligned} P(T_1 \geq s) &= P\left(\bigcap_{1\leq i\leq n} \{\text{aucun point dans }](i-1)s/n, is/n]\}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P\big(\{\text{aucun point dans }](i-1)s/n, is/n]\}\big) \end{aligned}$$

Pour n assez grand on a donc

$$P(T_1 \geq s) \approx (1 - \lambda s/n)^n \approx e^{-\lambda s}.$$

Autrement dit, T_1 suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Les deux heuristiques ci-dessus ainsi que la propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle sont les ingrédients d'une preuve de l'équivalence entre les différentes définitions données ci-dessous.

3.2 Définition(s)

Un processus de Poisson homogène est une variable aléatoire χ à valeur dans $\mathcal{S}$ satisfaisant certaines propriétés. Précisons la définition en utilisant les processus associés : $(N(t))_t, (T(i))_i$ et $(D_i)_i$. Voici trois définitions équivalentes. Les équivalences ne sont pas triviales (mais pas inaccessibles non plus).

Définition 1.

$N = (N(t))_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson homogène si :

1. Indépendance des accroissements : pour tout $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, les $N(t_{i+1}) - N(t_i)$ sont indépendants.
2. Homogénéité : pour tout $s, t \geq 0$, $N(t + s) - N(t)$ suit la même loi que N_s.

Définition 2.

$N = (N(t))_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson homogène s'il existe $\lambda > 0$ tel que :

1. Indépendance des accroissements.
2. Pour tout $s, t \geq 0$, $N(t + s) - N(t)$ suit une loi $\mathcal{P}(s\lambda)$.

On dit alors que N est un processus de Poisson homogène d'intensité λ.

Exercice. Montrer que cela caractérise la loi.

Définition 3.

$N = (N(t))_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson homogène s'il existe $\lambda > 0$ tel que :

1. Les D_n sont i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ (et donc d'espérance $1/\lambda$).

4 Quelques propriétés importantes

Théorème 4.1 *Soit χ un processus de Poisson homogène d'intensité $\lambda > 0$. On fixe t. On pose :*

$$\chi^t = \chi \cap]t, +\infty[- t.$$

Alors χ^t est un processus de Poisson homogène d'intensité $\lambda > 0$ indépendant de la restriction de χ à $[0, t]$.

Remarque. Si on utilise la définition 3, l'une des preuves naturelles exploite la propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle.

Théorème 4.2 (Distribution des points) *On considère un processus de Poisson homogène d'intensité $\lambda > 0$. Alors, pour tout $t > 0$:*

1. *N_t suit une loi $\mathcal{P}(\lambda t)$.*
2. *Pour tout entier $n \geq 0$, conditionnellement à $N_t = n$, $\{T_1, \ldots, T_n\}$ a la même loi que $\{U_1, \ldots, U_n\}$ où les U_i sont i.i.d. uniformes sur $[0, t]$.*

Remarque. Le résultat précédent est utile, entre autres choses, pour la simulation.

Théorème 4.3 (Amincissement) *On considère un processus de Poisson homogène $(T_i)_i$ d'intensité $\lambda > 0$. On se donne une suite indépendante $(B_i)_i$ de v.a.i.i.d. de loi Bernoulli de paramètre p où $p \in]0, 1[$. On considère*

$$\chi^p = \{T_i : i \geq 1 \text{ et } B_i = 1\} \text{ et } \chi^{1-p} = \{T_i : i \geq 1 \text{ et } B_i = 0\}.$$

Alors

- *χ^p est un processus de Poisson homogène d'intensité λp.*
- *χ^{1-p} est un processus de Poisson homogène d'intensité $\lambda(1-p)$.*
- *χ^p et χ^{1-p} sont indépendants.*

Remarques.

- Ce résultat est fortement relié au résultat élémentaire suivant. Soit N une v.a. de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit $(B_i)_i$ une suite indépendante de v.a.i.i.d. de loi Bernoulli de paramètre p où $p \in]0, 1[$. On considère

  $$N^p = \sum_{i=1}^{N} B_i \text{ et } N^{1-p} = \sum_{i=1}^{N} (1 - B_i).$$

  Alors
  - N^p suit une loi de Poisson de paramètre λp.
  - N^{1-p} suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-p)$.
  - N^p et N^{1-p} sont indépendants.
- Ces résultats ne sont-ils pas surprenants ?

Théorème 4.4 (Superposition) *Soit χ un processus de Poisson homogène d'intensité $\lambda > 0$. Soit χ' un processus de Poisson homogène d'intensité $\lambda' > 0$. On suppose ces deux processus indépendants. Alors $\chi \cup \chi'$ est un processus de Poisson homogène d'intensité $\lambda + \lambda'$.*

Remarques.

- Ce résultat se démontre relativement facilement à partir des définitions 1 et 3. La définition 3 permet de montrer que, avec probabilité 1, χ et χ' sont disjoints. On a alors, pour tout $0 \leq s \leq t$,

  $$\operatorname{card}\big((\chi \cup \chi') \cap [s, t]\big) = \operatorname{card}\big(\chi \cap [s, t]\big) + \operatorname{card}\big(\chi' \cap [s, t]\big).$$

Cela permet de conclure en utilisant la définition 1 et le fait que l'intensité d'un processus de Poisson homogène est l'espérance du nombre de point dans un intervalle de longueur 1.

— Ce résultat est fortement relié au résultat élémentaire suivant. Soit N une v.a. de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit N' une v.a. de loi de Poisson de paramètre $\lambda' > 0$. On suppose N et N' indépendantes. Alors $N + N'$ suit une loi de poisson de paramètre $\lambda + \lambda'$.

5 Point de vue plus abstrait

Espace d'état. Soit

$$\mathcal{S}^* = \{S \in]0, +\infty[: S \cap [0, t] \text{ est fini pour tout } t \geq 0\}.$$

On le munit d'une tribu comme on l'a fait précédemment pour $\mathcal{S}$.

Définition. Une variable aléatoire χ à valeurs dans $\mathcal{S}^*$ est un processus de Poisson si

1. Pour tout boréliens disjoints $B_1, \ldots, B_n$ de $]0, +\infty[$, les v.a. $\text{card}(B_1 \cap \chi), \ldots, \text{card}(B_n \cap \chi)$ sont indépendantes.
2. Pour tout borélien B de $]0, +\infty[$, $\text{card}(B \cap \chi)$ suit une loi de Poisson.

On appelle mesure d'intensité de χ la mesure μ sur $]0, +\infty[$ définie par

$$\mu(B) = E(\text{card}(B \cap \chi)).$$

La donnée de la mesure d'intensité caractèrise la loi d'un processus de Poisson. Les résultats sur la distribution des points, l'amincissement et la superposition se généralise naturellement à ce cadre.

Processus de Poisson homogène (étudié précédemment). C'est le cas où μ vaut une constante $\lambda > 0$ multipliée par la mesure de Lebesgue.

Processus de Poisson d'intensité $\lambda(x)dx$. C'est le cas où μ admet une densité λ par rapport à la mesure de Lebesgue et où λ est intégrable sur tout intervalle borné. Intuitivement, un tel processus de Poisson est un sous-ensemble aléatoire de $]0, +\infty[$ satisfaisant les deux propriétés suivantes :

— La probabilité qu'il y ait un point dans un intervalle infinitésimal $[x, x + dx]$ est $\lambda(x)dx$.

— Les restrictions du sous-ensemble aléatoire à deux régions disjointes sont indépendantes.

Sous des hypothèses raisonnables sur l'application λ, un processus de Poisson d'intensité $\lambda(x)dx$ peut se construire comme un processus de Poisson homogène avec un changement de temps (i.e. composé avec un homéomorphisme croissant de $]0, +\infty[$ sur lui-même).

Généralisation. Ce point de vue plus abstrait est le bon cadre pour parler de processus de Poisson sur des espaces plus exotiques que $]0, +\infty[$.

Processus de Poisson homogène sur $\mathbb{R}$. Exercice :

- Définir cet objet !
- Vérifier que si χ est un tel processus et si t est un réel, alors $\chi - t$ et χ ont même loi.
- Que dire de la loi de la taille de l'intervalle contenant l'origine (l'intervalle compris entre le premier point à gauche de l'origine et le premier point à droite) pour un tel processus ? Méditer le résultat. Mot clé : paradoxe de l'inspection.

Construction d'un processus de Poisson d'intensité $\lambda(x)dx$ à partir d'un processus de Poisson homogène sur $\mathbb{R}^2$. Exercice :

- On considère ξ un processus de Poisson sur $\mathbb{R}^2$ d'intensité la mesure de Lebesgue. Montrer que, avec probabilité 1, les points de ξ ont des abscisses distinctes.
- On se donne $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable et localement intégrable. On considère

  $$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \lambda(x)\}.$$

  On note χ la projection sur les abscisses de $\xi \cap A$. Montrer que χ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda(x)dx$.
- Un lien avec la méthode rejet ?