Tribus

Exercice 1 : Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que X_N (définie par $X_N(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega)$) est une variable aléatoire.

Exercice 2 : Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires. Montrer que $\{(X_n)_n$ converge$\}$ est un évènement.

Exercice 3 : Soit $f : X \to Y$ une application. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de parties de Y. Établir le résultat suivant :

$$\sigma\left(\{f^{-1}(A), A \in \mathcal{A}\}\right) = \{f^{-1}(B), B \in \sigma(\mathcal{A})\}.$$

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer qu'elle est mesurable pour les tribus boréliennes.

Exercice 5 : Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une application. Montrer que X est une variable aléatoire si et seulement si $X^{-1}(]-\infty, x])$ est mesurable pour tout réel x.

Exercice 6 : Soient X et Y deux variables aléatoires. Montrer que $X + Y$ est une variable aléatoire.

Exercice 7 : Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable. Soient P et Q deux mesures de probabilités sur cet espace. Montrer que pour que P et Q coïncident, il suffit qu'elles coïncident sur un sous-ensemble π de $\mathcal{F}$ tel que :

1. π est stable par intersection finie.
2. La tribu engendrée par π est $\mathcal{F}$.

Exercice 8 :

1. Établir que la tribu des boréliens sur $\mathbb{R}^d$ coïncide avec le produit des tribus boréliennes sur les différentes copies de $\mathbb{R}$:

$$\sigma(\{O, O \text{ ouvert de } \mathbb{R}^d\}) = \sigma(\{O, O \text{ ouvert de } \mathbb{R}\}) \otimes \cdots \otimes \sigma(\{O, O \text{ ouvert de } \mathbb{R}\}).$$

2. Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}^d$ une application. On note $X_1, \ldots, X_d$ ses composantes. Déduire de ce qui précède que X est une v.a. si et seulement si toutes les X_i sont des v.a.
3. Soient $X_1, \ldots, X_d$ des v.a. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application mesurable. Montrer que $f(X_1 + \cdots + X_d)$ est une v.a.

Exercice 9 : Soit $\mathcal{F}$ la tribu engendrée par une suite croissante de tribus $\mathcal{F}_n$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout A dans $\mathcal{F}$, il existe A' dans la réunion des $\mathcal{F}_n$ tel que :

$$P(A \Delta A') \leq \varepsilon.$$

(La notation $A\Delta A'$ désigne la différence symétrique de A et de A'. Elle est définie par $A\Delta A' = (A \setminus A') \cup (A' \setminus A)$.)

Exercice 10 : Soit Ω un espace métrique muni de sa tribu borélienne. Soit P une mesure de probabilité sur Ω. Montrer que tout borélien A vérifie la propriété suivante :

$$P(A) = \inf\{P(O), O \text{ ouvert contenant } A\} = \sup\{P(F), F \text{ fermé contenu dans } A\}.$$

Divers

Exercice 11 : On considère une suite d'évènements $(A_n)_{n\geq 1}$.

1. On suppose que la suite est croissante pour l'inclusion (i.e., pour tout $n \geq 1$, $A_n \subset A_{n+1}$). Établir l'égalité suivante :
$$P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$
2. On suppose que la suite est décroissante pour l'inclusion (i.e., pour tout $n \geq 1$, $A_{n+1} \subset A_n$). Établir l'égalité suivante :
$$P\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Exercice 12 : On considère une suite d'évènements $(A_n)_{n\geq 1}$. On suppose que la probabilité de chacun de ces évènements A_n est nulle. Montrer que la probabilité de la réunion de ces évènements est nulle. Cela reste-t-il vrai si on considère une famille non dénombrable d'évènements ?

Exercice 13 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que
$$P(X = 1) = P(X = -1) = P(Y = 1) = P(Y = -1) = 1/2.$$
Les variables X et XY sont-elles décorrélées ? Sont-elles indépendantes ?

Exercice 14 : Soit (X, Y) une v.a. de loi uniforme sur le carré C de $\mathbb{R}^2$ de sommets $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$. Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ? Démontrer votre affirmation. (Au besoin, on pourra admettre quelques évidences géométriques.)

Exercice 15 : Soient X et Y deux v.a.i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$. Que vaut $P(X = Y)$?

Exercice 16 : Soit $n \geq 1$ un entier. Soient X et Y deux v.a.i.i.d. de loi uniforme sur $\{0, 1/n, 2/n, \dots, 1\}$. Que vaut $P(X = Y)$.

Exercice 17 (Polynomes de Bernstein et théorème de Weierstrass) : Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une application continue. Pour tout $p \in [0, 1]$ et tout entier $n \geq 1$ on pose
$$P_n(p) = E\left(f\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right)\right)$$
où les X_i sont des v.a.i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre p. On définit ainsi une application P_n de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Expliciter l'application P_n.
2. Montrer que P_n converge simplement vers f.
3. Montrer que P_n converge uniformément vers f.

Exercice 18 (Lemme de Borel-Cantelli) : On considère une suite d'évènements $(A_n)_{n\geq 1}$. On pose :

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq k} A_n.$$

1. Vérifier :

$$\limsup_n A_n = \{\text{Il existe une infinité d'entiers } n \text{ tels que } A_n \text{ est réalisé}\}.$$

2. On suppose :

$$\sum_{n\geq 1} P(A_n) < \infty.$$

   Montrer :

$$P(\limsup_n A_n) = 0.$$

3. On suppose :

$$\sum_{n\geq 1} P(A_n) = \infty.$$

   On suppose de plus que les A_n sont indépendants. Montrer :

$$P(\limsup_n A_n) = 1.$$

4. Le résultat précédent est-il vrai sans l'hypothèse d'indépendance ?

Exercice 19 : Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1. Ainsi, pour tout réel $x \geq 0$, on a $P(X_1 \geq x) = \exp(-x)$. Soit a un réel.

1. On suppose $a \leq 1$. Montrer :

$$P(X_n \geq a\ln(n) \text{ pour une infinité de } n) = 1.$$

2. On suppose $a > 1$. Montrer :

$$P(X_n \geq a\ln(n) \text{ pour une infinité de } n) = 0.$$

Exercice 20 : Construire une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et centrées telles que S_n/n converge avec probabilité 1 vers 1. Indication : utiliser le lemme de Borel-Cantelli.

Exercice 21 (Loi des grands nombres L^4) : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. On suppose que les variables admettent un moment d'ordre 4 (i.e. $E(X_1^4) < \infty$) et sont centrées (i.e. $E(X_1) = 0$).

1. Soit $n \geq 1$. Expliciter

$$E\left((X_1 + \cdots + X_n)^4\right)$$

   en fonction de $E(X_1^4)$, de $E(X_1^2)$ et de n.
2. En déduire :

$$E\left(\sum_{n\geq 1}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right)^4\right) < \infty.$$

3. En déduire que $(X_1 + \cdots + X_n)/n$ converge avec probabilité 1 vers 0.

4. Que se passe-t-il si les variables ne sont pas centrées ?

Exercice 22 (Loi du $0-1$ de Kolmogorov) : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé. Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-tribus de $\mathcal{F}$. On définit sa tribu asymptotique par :

$$\mathcal{F}^\infty = \bigcap_{k\geq 1} \mathcal{F}^k$$

où $\mathcal{F}^k$ est la tribu engendrée par $\mathcal{F}_n$, $n \geq k$.

On suppose que les tribus $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes.

1. Montrer, pour tout $n \geq 1$, l'indépendance entre la tribu $\mathcal{F}^n$ et la tribu engendrée par les $\mathcal{F}_k$, $k < n$.
2. En déduire, pour tout $n \geq 1$, l'indépendance entre la tribu $\mathcal{F}^\infty$ et la tribu engendrée par les $\mathcal{F}_k$, $k < n$.
3. En déduire l'indépendance entre la tribu $\mathcal{F}^\infty$ et la tribu engendrée par les $\mathcal{F}_k$, $k \geq 1$.
4. En déduire l'indépendance de la tribu $\mathcal{F}^\infty$ avec elle-même.
5. Conclure que l'on a $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$ pour tout $A \in \mathcal{F}^\infty$.

Exercice 23 : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On considère l'évènement

$$A = \{\text{La suite } (X_n)_n \text{ converge}\}.$$

Montrer que cet évènement est de probabilité 0 ou 1 en utilisant la loi du $0-1$ de Kolmogorov.

Fonction caractéristique, transformée de Laplace, fonction génératrice

Exercice 24 : Soient X et Y deux vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^d$. Montrer que X et Y ont la même loi si et seulement si, pour tout vecteur $a \in \mathbb{R}^d$, $< X, a >$ et $< Y, a >$ ont la même loi ($< \cdot, \cdot >$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^d$). Peut-on remplacer "pour tout vecteur $a \in \mathbb{R}^d$" par "pour tout vecteur d'une base fixée de $\mathbb{R}^d$" ?

Exercice 25 : Soit ϕ la fonction caractéristique associée à une variable aléatoire. Montrer les propriétés suivantes :

1. L'application ϕ vaut 1 en 0 ;
2. Le module de ϕ est majoré par 1 ;
3. L'application ϕ est uniformément continue.

Exercice 26 : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante de la suite précédante. On pose $S = X_1 + \cdots + X_T$ si $T \geq 1$ et $S = 0$ sinon.

1. Montrer que S est une variable aléatoire.
2. Exprimer la fonction génératrice de S en fonction de celles de X_1 et de T.
3. Application. On suppose ici que X_1 et T sont intégrables. Montrer l'égalité $E(S) = E(X_1)E(T)$.

4. Application. Quelle est la loi de S si les X_i suivent une loi de Bernoulli de paramètre p et si N suit une loi de Poisson de paramètre λ ?

Exercice 27 : Soient X et X' des variables aléatoires positives. On note L_X et $L_{X'}$ leurs transformées de Laplace (considérées comme des applications de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$).

1. Montrer que si X et X' ont la même loi, alors $L_X = L_{X'}$.
2. On montre ici la réciproque. On pose pour cela $Y = \exp(-X)$, $Y' = \exp(-X')$ et on suppose que X et X' ont la même transformée de Laplace.
   (a) Montrer l'égalité $E(\phi(Y)) = E(\phi(Y'))$ pour toute application polynomiale ϕ.
   (b) Montrer que l'égalité précédente est vraie pour toute application continue ϕ.
   (c) En déduire le résultat.

Exercice 28 (Galton-Watson) : Soit $(X_{n,p})_{n\geq 0, p\geq 1}$ une famille de v.a.i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit X une v.a. de même loi que chacune des $X_{n,p}$. On pose $Z_0 = 1$ et, pour tout entier $n \geq 0$:

$$Z_{n+1} = X_{n,1} + \cdots + X_{n,Z_n}.$$

(Si $Z_n = 0$, on pose $Z_{n+1} = 0$.)

1. Exprimer la fonction génératrice de Z_n en fonction de celle de X.
2. En déduire une expression de $P(Z_n = 0)$ en fonction de la fonction génératrice de X.
3. On suppose $P(X = 0) > 0$ et $P(X = 0) + P(X = 1) < 1$. Quand a-t-on

   $$P(\exists n : Z_n = 0) < 1\,?$$

   Discuter suivant l'espérance de X.

Exercice 29 : Soient X une variable aléatoire et t un réel. Établir l'inégalité suivante :

$$P(X > t) \leq \inf_{s\geq 0} E(\exp(s(X-t))).$$

Exercice 30 : Soit $p \in]0,1[$. Pour tout $n \geq 1$, on note X_n une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et p. Soit $b \in]0,1[$.

1. On suppose $b > p$. Montrer que $P(X_n > nb)$ converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
2. On suppose encore $b > p$. On veut majorer la vitesse de convergence vers 0. Établir l'inégalité suivante :

   $$P(X_n > nb) \leq \lambda^n$$

   où

   $$\lambda = \left(\frac{1-p}{1-b}\right)^{1-b} \left(\frac{p}{b}\right)^b.$$

3. Que dire de $P(X_n < nb)$ si $b < p$?

Exercice 31 : Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit $b > \lambda$. Établir l'inégalité suivante :

$$P(X > b) \leq \left(\frac{\lambda}{b}\right)^b \exp(b-\lambda).$$

Que dire de $P(X < b)$ si $b < \lambda$.

Exercice 32 (Inégalité de Hoeffding) : Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans les segments $[a_i, b_i]$. Soit $t > 0$. On cherche à établir l'inégalité suivante :

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - E(X_i)) \geq t\right) \leq \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right).$$

Si Y est une variable aléatoire bornée on note ϕ_Y la transformée de log-Laplace de Y. C'est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\phi_Y(s) = \ln(E(\exp(sY)))$.

1. Montrer que, si Y est une variable aléatoire à valeurs dans le segment $[a, b]$, alors sa variance est majorée par $(b - a)^2/4$.
2. Montrer que, si Y est une variable aléatoire bornée, alors ϕ_Y est deux fois dérivable et que sa dérivée seconde est la variance de Y relativement à une nouvelle mesure de probabilité sur l'univers.
3. En déduire que, si Y est une variable aléatoire à valeurs dans le segment $[a, b]$, alors ϕ_Y'' est majorée par $(b - a)^2/4$.
4. En déduire, pour tout $s \geq 0$ et pour tout indice i, la majoration suivante :

   $$\phi_{X_i - E(X_i)}(s) \leq s^2(b_i - a_i)^2/8.$$

   (Indication : que valent $\phi_{X_i - E(X_i)}(0)$ et $\phi'_{X_i - E(X_i)}(0)$?)
5. En déduire une inégalité pour la transformée de Laplace de $\sum_{i=1}^{n}(X_i - E(X_i))$ puis conclure.

Exercice 33 : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose, pour tout $n \geq 1$:

$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

On pose, pour tout $n \geq 1$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Enfin, pour tout réel u, on pose :

$$f(u) = E(\exp(uX_1)).$$

L'objectif de cet exercice est d'établir le résultat suivant : pour tout $\beta > 1/2$, on a, avec probabilité 1 :

$$\lim \frac{S_n}{n^\beta} = 0.$$

1. Soit Y une variable aléatoire. Soient a et u deux réels strictement positifs. Établir l'inégalité suivante :

   $$P(Y \geq a) \leq E(\exp(u(Y - a))).$$

2. En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, l'inégalité suivante :

   $$P(S_n \geq a) \leq f(u)^n \exp(-ua).$$

3. Établir l'inégalité suivante :
$$f(u) \leq \exp(u^2/2).$$
(On pourra utiliser un développement en série entière.)
4. En déduire :
$$P(S_n \geq a) \leq \exp\left(-\frac{a^2}{2n}\right).$$
5. En déduire, pout tout ε et tout $\beta > 1/2$, l'inégalité suivante :
$$E\left(\sum_{n=1}^{+\infty} 1_{\{|S_n| \geq \varepsilon n^\beta\}}\right) < \infty.$$
6. Conclure.

Lois et espérances conditionnelles

Exercice 34 : Soit X une v.a. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Soit T une v.a. positive indépendante de X. Que vaut, pour $t \geq 0$, $P(X - T \geq t | X \geq T)$?

Exercice 35 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre p. Soit N une v.a. indépendante de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose $S = X_1 + \cdots + X_N$.
1. Quelle est la loi de S conditionnellement à N ?
2. Quelle est la loi de $N - S$ conditionnellement à S ? Qu'en conclure ?

Exercice 36 : Soient A et B deux v.a. indépendantes de loi uniforme sur le segment $[0, 1]$.
1. Donner la loi de AB conditionnellement à A.
2. En déduire la fonction de régression de AB par rapport à A.
3. En déduire $E(AB|A)$. Retrouver ce résultat sans passer par les lois conditionnelles.

Exercice 37 : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi uniforme sur le segment $[0, 1]$. On fixe un entier $k \geq 2$ et on note A_k (resp. B_k) le minimum (resp. maximum) de $X_1, \ldots, X_k$.
1. Loi de A_k ?
2. Loi de B_k ?
3. Loi du couple (A_k, B_k) ?
4. Loi de B_k conditionnellement à A_k ?
5. Loi de X_k conditionnellement à A_k ?

Exercice 38 : Soit (X, Y) un couple de v.a. distribué uniformément sur le disque unité.
1. Donner la loi de Y conditionnellement à X.
2. En déduire si les variables X et Y sont indépendantes ou non. Retrouver ce résultat directement. Les variables sont-elles décorrélées ? (C'est-à-dire, a-t-on $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$?)
3. En déduire également $E(Y|X)$. Retrouver ce résultat directement.

Exercice 39 : Soit (X, Y) un couple de v.a. distribué uniformément sur le cercle unité. Donner la loi de Y conditionnellement à X.

Exercice 40 : Soient X et Y deux v.a. indépendantes de loi uniforme sur le segment $[0, 1]$. Donner la loi de (X, Y) conditionnellement à $X + Y$.

Exercice 41 : Soient X, Y et Z trois variables aléatoires. On suppose que X et Y sont intégrables. On suppose également que les couples (X, Z) et (Y, Z) ont la même loi. Établir l'égalité suivante : $E(X|Z) = E(Y|Z)$.

Exercice 42 : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires uniformément distribué sur le triangle $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x < 1\}$.

1. Donner la loi de Y conditionnellement à X.
2. En déduire la régression de Y par rapport à X.
3. En déduire l'espérance conditionnelle de Y par rapport à X.
4. Retrouver le résultat précédant en constatant tout d'abord que (X, Y) et $(X, X - Y)$ ont la même loi.
5. Que vaut $E(Y^2|X)$?

Exercice 43 : Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.i.i.d. intégrables. Que vaut $E(X_1|X_1 + \cdots + X_n)$?

Exercice 44 : Soit X une v.a. de loi binomiale de paramètres n et p. Soit Y une v.a. indépendante de loi binomiale de paramètres m et p. Que vaut $E(X|X + Y)$?

Exercice 45 : Soit X une variable aléatoire de carré intégrable sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Autrement dit, X est un élément de l'espace de Hilbert $H = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1. Quelle est la projection orthogonale de X sur la droite des applications constantes de Ω dans $\mathbb{R}$? Quelle formule en déduit-on pour la variance ?
2. Soit $\mathcal{A}$ une tribu de Ω incluse dans $\mathcal{F}$. On identifie naturellement $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ avec un sous-espace fermé de H. Quelle est la projection orthogonale de X sur cet espace ? Quelle formule en déduit-on pour la variance conditionnelle : $E((X - E(X|\mathcal{A}))^2|\mathcal{A})$?

Exercice 46 : Soit X et Y deux v.a. indépendantes. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application positive telle que $\phi(X, Y)$ soit intégrable. Quelle est l'espérance conditionnelle de $\phi(X, Y)$ par rapport à Y ?

Exercice 47 : Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. intégrables. Soit N une v.a. indépendante et intégrable à valeurs dans $\mathbb{N}$. Que vaut $E(X_1 + \cdots + X_N|N)$?

Gaussiennes

Exercice 48 : Soit X une variable aléatoire gaussienne centrée et réduite. Soit Y une variable aléatoire indépendante de X et telle que $P(Y = -1) = P(Y = 1) = 1/2$. On pose $Z = YX$.

1. Montrer que Z suit une loi gaussienne centrée et réduite.
2. La variable aléatoire $X + Z$ est-elle gaussienne ?
3. Le couple aléatoire (X, Z) est-il gaussien ?

4. Les variables aléatoires X et Z sont-elles indépendantes ?
5. Les variables aléatoires X et Z sont-elles décorrélées ?

Exercice 49 : On pose
$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que K est une matrice symétrique positive. Pour la suite, on se donne (X, Y, Z) un vecteur aléatoire gaussien centré et de matrice de covariance K.
2. Loi de $U = X + 2Y - Z$?
3. Loi de $(X + Y, Y - Z)$? La loi de ce vecteur admet-il une densité ?

Exercice 50 : On pose
$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que K est une matrice symétrique positive. On note dans la suite (X, Y, Z) un vecteur aléatoire gaussien d'espérance $(0, 1, 2)$ et de matrice de covariance K.
2. Quelle est la loi de la variable aléatoire $X + Y + Z$?
3. Quelle est la loi du vecteur aléatoire $(X + Y, Y + Z)$?
4. À quelle condition sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ le vecteur aléatoire $aX + bY + cZ$ est-il constant avec probabilité 1 ?
5. En déduire que (X, Y, Z) appartient avec probabilité 1 à un plan affine que l'on précisera.
6. Montrer qu'il existe un unique réel b tel que $X + bY$ et X soient indépendants.
7. En déduire $E(Y|X)$ et $t \mapsto E(e^{itY}|X)$.

Exercice 51 : On pose
$$K = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que K est une matrice symétrique positive. Pour la suite, on se donne $U = (X, Y, Z)$ un vecteur aléatoire gaussien centré et de matrice de covariance K.
2. (a) Des constantes réelles a, b, c étant fixées, déterminer la loi de la variable aléatoire $aX + bY + cZ$.
   (b) À l'aide d'une décomposition de Gauss (dans l'ordre naturel a, b, c), déterminer l'ensemble des triplets (a, b, c) tels que $aX + bY + cZ$ soit presque sûrement nulle.
   (c) La loi de U admet-elle une densité ?.
3. À l'aide de la décomposition de Gauss, déterminer une matrice triangulaire supérieure L telle que $K =^t LL$ (décomposition de Cholesky). Prouver que U a la même loi que ${}^tLV$ où V est un vecteur gaussien centré et réduit de $\mathbb{R}^3$.

Convergence en loi

Exercice 52 : Soit $\lambda > 0$. Pour tout entier $n \geq 1$, on se donne une variable aléatoire X_n de loi binomiale de paramètres n et λ/n. Étudier la convergence en loi de la suite X_n.

Exercice 53 : Soit $\lambda > 0$. Pour tout entier $n \geq 1$, on se donne une variable aléatoire X_n de loi géométrique de paramètre λ/n. Etudier la convergence en loi de X_n/n.

Exercice 54 : Comparer les différents mode de convergence de variables aléatoires (convergence presque sure, en probabilité, en loi, L^p).

Exercice 55 : Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires convergeant en loi vers une variable aléatoire X. Soit $(Y_n)_n$ une suite de variables aléatoires convergeant en loi vers une variable aléatoire Y. La suite $(X_n + Y_n)_n$ converge-t-elle en loi vers $X + Y$? Que se passe-t-il avec les autres modes de convergence ?

Exercice 56 : Soit X une variable aléatoire uniforme sur le segment $[0, 1]$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$X_n = \frac{1}{n}\lfloor nX \rfloor.$$

1. Montrer que X converge en loi vers X.
2. Exhiber un borélien A tel que $P(X \in A)$ soit nul mais que $P(X_n \in A)$ vaille 1 pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 57 : Soit X une variable aléatoire. Pour tout entier $n \geq 1$, on se donne une variable aléatoire Y_n indépendante de X et de loi gaussienne centrée et de variance $1/n$. Étudier la convergence en loi de $X + Y_n$.

Exercice 58 : Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout entier $n \geq 1$, on note M_n le maximum de $\{X_1, \dots, X_n\}$.

1. Étudier la convergence en loi de M_n/n.
2. Étudier la convergence en loi de $M_n/\ln(n)$.
3. Étudier la convergence en loi de $M_n - \ln(n)$.

Exercice 59 : Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires convergeant en loi vers une variable aléatoire X. Soit A un fermé tel que $P(X_n \in A)$ vaille 1 pour tout entier $n \geq 1$. Montrer que $P(X \in A)$ vaut 1.

Exercice 60 : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. intégrables. Étudier la convergence de la suite de mesures de probabilités (aléatoires) $(\mu_n)_{n\geq 1}$ où μ_n est définie par :

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}.$$

Exercice 61 : On se donne une variable aléatoire U de loi uniforme sur le segment $[0, 1]$. On suppose que les fonctions de répartitions de toutes les autres variables aléatoires de cet exercice sont des bijections de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.

1. Soit X une variable aléatoire et F_X sa fonction de répartition. Montrer que la variable aléatoire $Y := F_X^{-1}(U)$ a la même loi que X.
2. Soit $(X_n)_n$ une suite de variable aléatoire convergeant en loi vers une variable aléatoire X. Déduire de la question précédente qu'il existe une suite $(Y_n)_n$ de variables aléatoires ainsi qu'une variable aléatoire Y telles que :
   (a) Pour tout n, X_n et Y_n ont la même loi.
   (b) X et Y ont la même loi.
   (c) La suite (Y_n) converge presque surement (et même simplement) vers Y.

Chaînes de Markov

Exercice 62 : Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une filtration.

1. Soient T un temps d'arrêt p.s. fini et $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires. Montrer que X_T est $\mathcal{F}_T$ mesurable.
2. Soient S et T deux temps d'arrêts tels que l'inégalité $S \leq T$ soit presque sûrement vérifiée. Établir l'inclusion $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

Exercice 63 (Temps de sortie géométrique) : Soit $(X_n)_n$ une chaine de Markov sur un ensemble dénombrable S. Soit C un sous-ensemble non vide de S. On note T le premier instant positif ou nul ou la marche atteint C. On suppose :

i. Pour tout $x \in S \setminus C$, T est fini avec une probabilité non nulle.
ii. L'ensemble $S \setminus C$ est fini.

1. Montrer que la condition i. est vérifiée si la chaine est irréductible.
2. Montrer l'existence de $N \geq 1$ et de $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in S \setminus C$ et tout $k \in \mathbb{N}$ on ait : $P(T > Nk) \leq (1-\varepsilon)^k$.

Exercice 64 : Soit $(X_n)_n$ une chaine de Markov. On note T_y le premier instant positif ou nul de passage en y. Établir l'égalité suivante :

$$P^x(X_n = y) = \sum_{0\leq k\leq n} P^x(T_y = k)P^y(X_{n-k} = y).$$

Exercice 65 (Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$) : Soit $x \in \mathbb{Z}$. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On considère le processus $(S_n)_{n\geq 0}$ défini par $S_0 = x$ et, pour tout $n \geq 1$, $S_n = S_{n-1} + X_n$. Montrer que ce processus est une chaine de Markov issue de x.

Exercice 66 (Marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$) : Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une chaine de Markov sur $\mathbb{Z}$ dont les transitions sont données par $p_{i,j} = 1/2$ si $j = i \pm 1$ et $p_{i,j} = 0$ sinon. Si $a \in \mathbb{Z}$, on note T_a le premier instant positif ou nul où la chaine passe en a et T_a^+ le premier instant strictement positif où la chaine passe en a.

1. Soient $a \leq x \leq b$ trois entiers relatifs.
   (a) Montrer que $E^x(\min(T_a, T_b))$ est finie.
   (b) Expliciter $f(x) = P^x(T_a < T_b)$. (Indication : trouver un lien, lorsque x est différent de a et de b, entre $f(x-1), f(x)$ et $f(x+1)$.)

(c) Expliciter $g(x) = E^x(\min(T_a, T_b))$. (Même indication que pour la question précédente.)

2. Montrer, lorsque $0 \leq s < 1$, l'égalité $E^0(s^{T_0^+}) = 1 - (1 - s^2)^{1/2}$. (Indication : utiliser plusieurs fois les propriétés de Markov).
3. Montrer, lorsque $0 \leq s < 1$, l'égalité $\sum_{n \geq 0} P^0(X_n = 0)s^n = (1 - s^2)^{-1/2}$.

Exercice 67 (Marches aléatoires biaisées sur $\mathbb{Z}$) : Soit $(X_n)_n$ une chaine de Markov sur $\mathbb{Z}$ dont les transitions sont données par $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = 1 - p$ et $p_{i,j} = 0$ sinon. On suppose $p < 1/2$. Dans les deux questions suivantes, on pourra chercher des solutions de la forme $n \mapsto a^n$.

1. Quelles sont les mesures stationnaires pour la chaine ?
2. Quelle est la probabilité de revenir en 0 en partant de x. (Indication : comme dans l'exercice sur les marches simples).

Exercice 68 : Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaine de Markov sur un espace dénombrable. On note T_0^+ le premier instant strictement positif où la chaine passe en 0. On définit, pour tout $s \in [0, 1[$, les quantités suivantes :

$$a(s) = \sum_{n \geq 0} P^0(X_n = 0)s^n \text{ et } b(s) = E^0(s^{T_0^+}).$$

Établir l'égalité suivante : $a(s) = 1/(1 - b(s))$.

Exercice 69 (Chaines de Markov cachées) : Si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaine de Markov à valeur dans l'ensemble dénombrable A et si $F : A \to B$ est une application, la suite $(F(X_n))_{n \geq 0}$ est-elle une chaine de Markov ?

Exercice 70 (Urne d'Ehrenfest) : Soit $N \geq 1$ un entier. Soit $(X_n)_n$ une chaine de Markov sur $\{0, 1\}^N$ dont les transitions sont données par :

$$\begin{cases} p_{x,y} = 1/N \text{ si les vecteurs } x \text{ et } y \text{ diffèrent d'une seule coordonnée,} \\ p_{x,y} = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Pour tout n, on définit Y_n comme la somme des coordonnées de X_n.

1. Quelles sont les mesures de probabilités stationnaires de $(X_n)_n$?
2. Montrer que $(X_n)_n$ est une chaine de Markov.
3. Quelles sont ses probabilités de transitions ?
4. Quelles sont ses mesures de probabilités stationnaires ?

Exercice 71 : Chaque individu d'une espèce possède n gènes pouvant être de deux types différents. La reproduction se produit de la manière suivante :

1. le parent double ses gènes (s'il y avait k gènes d'un type et $n - k$ de l'autres, il y en a maintenant $2k$ du premier type et $2n - 2k$ de l'autre).
2. le parent se divise en deux enfants, chacun prenant, au hasard, n gènes parmi les $2n$ présents.

Que penser des gènes d'un lointain descendant d'un unique individu ?

Exercice 72 (Marche aléatoire avec biais aléatoire) : On reprend l'exercice sur la marche aléatoire avec biais sur $\mathbb{Z}$, mais on suppose maintenant que le biais est choisi aléatoirement avant de commencer la marche et qu'ensuite la marche évolue avec ce biais. Le processus obtenu est-il Markovien ?

Exercice 73 (La mafia orléanaise) : Vous devez 8000 euros à la terrible mafia orléanaise. Vous ne possédez malheureusement que 1000 euros. N'ayant rien à perdre, vous décidez de tenter votre chance à un jeu de hasard. Dans ce jeu, à chaque partie, vous pouvez misez tout ou partie de votre fortune. Avec probabilité 1/2 vous ne récupérez rien, avec probabilité 1/2 vous récupérez le double de votre mise. Discutez des trois stratégies suivantes :

Escargot. Vous misez à chaque partie 1 euros.

Tortue. Vous misez à chaque partie 2 euros.

Lièvre. Vous misez à chaque partie la totalité de votre fortune.

Variantes et prolongements :

1. Et si l'on remplace 8000 par 9000 ?
2. Et si le jeu n'est plus équitable (probabilité de doubler sa mise strictement inférieure à 1/2) ?
3. Une stratégie optimale (parmi toutes les stratégies possibles) ?

Exercice 74 : On note X_n la somme des résultats de n lancers d'un dé (pas nécessairement honnête). Que pensez-vous de la probabilité que 13 divise X_n lorsque n est grand ?

Martingales

Exercice 75 (Galton-Watson) : Soit $X_{n,i}, n, i \geq 1$ une famille de v.a.i.i.d. intégrables à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note μ leur espérance commune. On suppose $\mu > 0$. On définit un processus $Z_n), n \geq 0$ par $Z_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$:

$$Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_{n,i}.$$

Pour tout $n \geq 0$ on note $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les $X_{k,i}, 1 \leq k \leq n, 1 \leq i$.

1. Vérifier que le processus défini par $W_n = \mu^{-n} Z_n$ est une martingale pour la filtration précédente.
2. En déduire que W_n converge p.s. vers une v.a. W p.s. finie.
3. On suppose $\mu < 1$. Montrer que W est p.s. nulle.
4. On suppose $\mu = 1$ et $P(X_{1,1} = 1) < 1$. Montrer que W est p.s. nulle.
5. On suppose $\mu > 1$ et σ^2 :=var$(X_{1,1}) < \infty$. On veut montrer que W n'est pas p.s. nulle. Indications :
   (a) Montrer
   $$E(W_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) = W_{n-1}^2 + E\big((W_n - W_{n-1})^2 | \mathcal{F}_{n-1}\big).$$
   (b) Montrer
   $$E\big((W_n - W_{n-1})^2 | \mathcal{F}_{n-1}\big) = \mu^{-2n} \sigma^2 Z_{n-1}.$$
   (c) Montrer
   $$E(W_n^2) = E(W_{n-1}^2) + \sigma^2 \mu^{-n-1}.$$

(d) En déduire que W_n est bornée dans L^2.

(e) Conclure.

Exercice 76 (Urne de Polya) : Une urne contient initialement une boule rouge et une boule noire. On itère l'opération suivante : tirer une boule de l'urne ; la remettre et ajouter une boule de la même couleur. On note X_n la proportion de boules rouges dans l'urne après l'étape n.

1. Montrer que X_n converge presque sûrement.
2. Préciser la loi de la limite.

Exercice 77 (Décomposition de Doob) : Soit $W_n, n \geq 0$ un processus adapté à une filtration $\mathcal{F}_n$. On suppose que W_n est intégrable pour tout n.

1. Montrer qu'il existe un unique couple de processus (M_n, A_n) tel que :
   (a) M_n est une martingale pour la filtration $\mathcal{F}_n$.
   (b) A_n est un processus prévisible pour cette filtration (pour tout $n \geq 1$, A_n est $\mathcal{F}_{n-1}$ mesurable) et $A_0 = 0$.
   (c) $W_n = M_n + A_n$.

   On appelle $W_n = M_n + A_n$ la décomposition de Doob du processus.
2. Que dire de A_n si W_n est une sous-martingale ?
3. Expliciter A_n si W_n est défini par $W_n = (X_1 + \cdots + X_n)^2$ où les X_i sont des v.a.i.i.d. de carré intégrable et centrées.
4. Montrer que si W_n est une martingale de carré intégrable (pour tout n, W_n est de carré intégrable) alors le processus prévisible associé à W_n vérifie :

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} E\big((W_k - W_{k-1})^2 | \mathcal{F}_{k-1}\big).$$

Exercice 78 (Martingales à accroissements bornés) : Soit A un réel. Soit $M_n, n \geq 0$ une martingale telle que, pour tout $n \geq 1$, on ait $|M_n - M_{n-1}| \leq A$. On pose

$$C = \{M_n \text{ converge vers une limite finie}\}$$

et

$$D = \{\liminf M_n = -\infty \text{ et } \limsup M_n = +\infty\}.$$

Montrer $P(C \cup D) = 1$. Indications :

1. Montrer que l'on peut supposer $M_0 = 0$.
2. Considérer alors les processus du type $M_{n \wedge N}$ où N est le premier instant où la martingale passe en dessous d'une certaine valeur.

Exercice 79 (Borel-Cantelli) : Soit $\mathcal{F}_n, n \geq 0$ une filtration. Soit $A_n, n \geq 1$ une suite d'évènements adaptés à cette filtration. Montrer l'égalité presque sûre suivante :

$$\limsup A_n = \left\{ \sum_n P(A_n | \mathcal{F}_{n-1}) = +\infty \right\}.$$

Indication : utiliser le résultat sur les martingales à accroissements bornés.

Exercice 80 (Marche aléatoire simple sans biais sur $\mathbb{Z}$) : Soit $X_n, n \geq 1$ une suite de v.a.i.i.d. de loi donnée par $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = 1/2$. On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On fixe un entier $a \geq 1$ et on note T le temps d'atteinte de $\{-a, a\}$.

1. Montrer que $S_n^2 - n$ est une martingale.
2. En déduire $E(T) = a^2$.

Exercice 81 (Marche aléatoire simple biaisée sur $\mathbb{Z}$) : Soit $X_n, n \geq 1$ une suite de v.a.i.i.d. de loi donnée par $P(X_1 = 1) = 1 - P(X_1 = -1) = p$. On suppose $1/2 \leq p < 1$. On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On note enfin T_a le temps d'atteinte positif ou nul de l'entier a. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on pose $\phi(\theta) = E(\exp(\theta X_1))$.

1. Montrer que le processus défini par $M_n = \exp(\theta S_n)\phi(\theta)^{-n}$ est une martingale.
2. En déduire, pour tout $\theta \geq 0$, l'égalité :
$$E\left(\phi(\theta)^{-T_1}\right) = \exp(-\theta).$$
3. En déduire, pour tout $s \in]0, 1]$, l'égalité :
$$E\left(s^{T_1}\right) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)s^2}}{2(1-p)s}.$$
4. On suppose $1/2 < p < 1$. On fixe deux entiers a et b tels que $a < 0 < b$. Que vaut $P(T_a < T_b)$? Indications :
   (a) Montrer que le temps d'arrêt $T_a \wedge T_b$ est p.s. fini.
   (b) Pour quelle valeur non nulle de θ a-t-on $\phi(\theta) = 1$? Considérer la martingale associée.

Exercice 82 (Le singe dactylographe) : À chaque instant $1, 2, 3, \ldots$, un singe tape au hasard une lettre majuscule. On s'intéresse au temps qu'il lui faut en moyenne pour taper un mot fixé.

La suite de lettre est modélisée par une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de v.a.i.i.d. uniformément distribuées sur les 26 éléments de $\{A, B, \ldots, Z\}$. Si $\mathcal{M}$ est un mot (une suite finie de lettres comportant au moins une lettre) on note $T^{\mathcal{M}}$ le premier instant où le mot $\mathcal{M}$ apparaît dans la suite $(X_n)_n$. Ainsi, si la suite de lettres tapées commence par :
$$A, Z, K, A, J, B, A, B, B, F, \ldots$$
alors on a par exemple $T^A = 1, T^K = 3$ et $T^{AB} = 8$. On s'intéresse à $E(T^{\mathcal{M}})$. On note $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_n$ la filtration naturellement associée à $(X_n)_n$.

1. Dans les deux questions suivantes, on pourra se contenter d'écrire la preuve pour un mot particulier (mais en veillant à écrire une preuve qui se généralise facilement à tout mot).
   (a) Montrer que les $T^{\mathcal{M}}$ sont des temps d'arrêt.
   (b) Montrer que l'espérance des $T^{\mathcal{M}}$ est finie.
2. Donner la loi et l'espérance de T^A.
3. Les v.a. T^{AB} et T^{AA} ont-elle la même loi ? On pourra considérer par exemple $P(T^{AB} = 3)$ et $P(T^{AA} = 3)$.
4. Dans cette question, on suppose que le mot est $\mathcal{M} = ABA$. On imagine qu'une infinité de joueurs font des paris sur les lettres tapées par le singe. Le joueur 1 mise 1 euro sur "la première lettre est un A". S'il perd il s'arrête. Sinon, il gagne 26 euros et les mise sur "la deuxième lettre est un B". S'il perd il s'arête. Sinon, il gagne 26^2 euros et les mise sur "la troisième lettre est un A". S'il perd il s'arête. Sinon, il gagne 26^3 euros et il s'arête. Pour tout entier i, le joueur i fait la même chose mais à partir de l'instant i : il parie sur la lettre i, puis éventuellement sur la lettre $i+1$ etc.

On note G_n^i le gain total du joueur i à l'instant n. Ainsi, si la suite de lettres tapées commence par :

$$A, Z, K, A, J, B, A, B, B, F, \dots$$

alors on a par exemple $G_1^1 = 26 - 1, G_2^1 = -1, G_3^1 = -1$ et $G_1^7 = 0, G_6^7 = 0, G_7^7 = 26 - 1, G_8^7 = 26^2 - 1, G_9^7 = -1$.

(a) Montrer que, pour tout i, $(G_n^i)_n$ est une martingale pour la filtration $\mathcal{F}$.

(b) Montrer que le processus M défini par $M_n = \sum_i G_n^i$ est une martingale pour la filtration $\mathcal{F}$.

(c) En déduire $E(T^{ABA})$.

5. Donner, sans justifications, $E(T^{AA})$ et $E(T^{AB})$. Expliquer en quelques lignes pourquoi l'inégalité observée est intuitive ?
6. Donner, sans justifications, $E(T^{ABRACADABRA})$.

Exercice 83 : Soit $(M_n)_n$ une martingale pour la filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_n$. On suppose que la martingale est positive. Soient $0 \leq p \leq q$ deux entiers. Montrer l'inclusion presque sûre suivante :

$$\{M_p = 0\} \ \subset \{M_q = 0\}.$$

Exercice 84 : Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de constante L. L'objectif de cette exercice est de montrer l'existence d'une fonction intégrable $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in [0, 1]$, on ait $f(x) = f(0) + \int_0^x g$.

Soit X une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$. Pour tout $n \geq 0$ on pose :

$$eX_n = \frac{\lfloor 2^n X \rfloor}{2^n} \text{ et } Z_n = 2^n \big(f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n) \big)$$

où $\lfloor u \rfloor$ désigne la partie entière de u.

1. Donner, pour tout n, la loi de X_n.
2. Montrer que la suite $(X_n)_n$ converge simplement vers une variable aléatoire que l'on précisera.
3. Montrer l'égalité suivante :

$$\bigcap_{n \geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots) = \sigma(X).$$

4. Montrer que $(Z_n)_n$ est une martingale pour la filtration naturelle de $(X_n)_n$.
5. Montrer que $(Z_n)_n$ converge presque sûrement et dans L^1 vers une certaine variable aléatoire Z_∞.
6. Montrer qu'il existe une fonction borélienne $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $Z_\infty = g(X)$ avec probabilité 1.
7. Montrer, pour tout $n \geq 0$, l'égalité suivante :

$$Z_n = 2^n \int_{X_n}^{X_n + 2^{-n}} g(u) du.$$

8. Conclure.

Exercice 85 (Martingales et concentration) :

1. Soit X une variable aléatoire intégrable sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Soit
$$\{\emptyset, \Omega\} = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n = \mathcal{F}$$
une filtration finie. On pose, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$:
$$\Delta_i = E(X|\mathcal{F}_i) - E(X|\mathcal{F}_{i-1}).$$
On suppose que ces quantités sont bornées. Soit D le réel positif tel que :
$$D^2 = \|\Delta_1\|_\infty^2 + \cdots + \|\Delta_n\|_\infty^2.$$
Établir, pour tout $r > 0$, l'inégalité de concentration suivante :
$$P(\{|X - E(X)| \geq r\}) \leq 2 \exp\left(-\frac{r^2}{2D^2}\right).$$
Indications :
   (a) Montrer, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $u \in [-1, 1]$ l'inégalité :
$$\exp(\lambda u) \leq \frac{1+u}{2} \exp(\lambda) + \frac{1-u}{2} \exp(-\lambda).$$
   (b) En déduire, pour tout i, les inégalités suivantes :
$$E(\exp(\lambda \Delta_i)|\mathcal{F}_{i-1}) \leq \cosh(\lambda \|\Delta_i\|_\infty) \leq \exp(\lambda^2 \|\Delta_i\|_\infty^2/2).$$
   (c) En déduire l'inégalité suivante :
$$E\big(\exp(\lambda\Delta_1 + \cdots + \lambda\Delta_n)\big) \leq \exp(\lambda^2 D^2/2).$$
   (d) Conclure.

2. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans les segments $[a_i, b_i]$. Soit $r > 0$. Établir l'inégalité suivante (une version de l'inégalité de Hoeffding) :
$$P\left(\left|\sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i))\right| \geq r\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{r^2}{2\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right).$$

3. Soit (Ω, d) un espace métrique fini et $\mathcal{L}$ un réel positif. On dit que Ω est de longueur au plus $\mathcal{L}$ s'il existe une suite $\{\Omega\} = \chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_n = \{\{x\}_{x\in\Omega}\}$ de partitions de Ω et une suite $a_1, \ldots, a_n$ de réels tels que :
   i. Pour tout $i \geq 1$, tout élément de χ_i est inclus dans un élément de χ_{i-1} ;
   ii. Pour tout $i \geq 1$, si A et A' sont deux éléments de χ_i inclus dans le même élément B de χ_{i-1}, alors il existe une bijection ϕ de A sur A' telle que, pour tout x dans A, on ait $d(x, \phi(x)) \leq a_i$;
   iii. On a $\mathcal{L}^2 = a_1^2 + \cdots + a_n^2$.

   On munit (Ω, d) de la mesure de probabilité uniforme P. Montrer que si (Ω, d) est de longueur au plus $\mathcal{L}$ alors, pour toute variable aléatoire 1-lipschitzienne $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et tout $r \geq 0$, on a :
$$P(\{|X - E(X)| \geq r\}) \leq 2 \exp(-r^2/2\mathcal{L}^2).$$

4. On note Ω le groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$. On le munit de la mesure de probabilité uniforme P et de la métrique d définie par :

$$d(\sigma, \sigma') = \frac{1}{n}\mathrm{card}(\{i : \sigma(i) \neq \sigma'(i)\}).$$

Montrer que si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire 1-lipschitzienne alors, pour tout $r \geq 0$, on a :

$$P(\{|X - E(X)| \geq r\}) \leq 2\exp(-nr^2/8).$$