Partiel - Probabilités
M1 - 2009-2010

Rappels. Soit X une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

- Sa loi admet pour densité l'application définie par $x \mapsto (2\pi)^{-1/2}\exp(-x^2/2)$.
- Sa fonction caractéristique ϕ_X vérifie, pour tout réel t, $\phi_X(t) = \exp(-t^2/2)$.

Exercice 1 : Soient A, B, C et D quatre variables aléatoires réelles indépendantes de loi commune $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $X = AB + CD$. Soit Y une variable aléatoire réelle dont la loi admet pour densité la fonction définie par $x \mapsto \exp(-|x|)/2$. L'objectif de cet exercice est de montrer que X et Y ont la même loi.

1. Montrer que la fonction caractéristique de AB vérifie :
$$\phi_{AB}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$
2. Expliciter la fonction caractéristique de X.
3. Conclure.

Exercice 2 :

1. Soit V un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et K une matrice carrée de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Sous quelles conditions existe-t-il un vecteur gaussien sur $\mathbb{R}^3$ de moyenne V et de matrice de variance K ?
2. Pour la suite, on fixe
$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$
et
$$V = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$
Montrer que les conditions énoncées dans la première question sont vérifiées. Pour la suite, on fixe (X, Y, Z) un vecteur gaussien sur $\mathbb{R}^3$ de moyenne V et de matrice de variance K.
3. Quelle est la loi de la variable aléatoire $X + Y + Z$?
4. Quelle est la loi du vecteur aléatoire $(X, Y + Z)$?
5. Montrer qu'il existe un unique réel λ tel que $X + \lambda Y$ et Z soient indépendants.

Exercice 3 : Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ de loi uniforme sur le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 4 : Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$. Pour tout n, on pose
$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

et
$$S_n = \frac{(X_1 - \overline{X}_n)^2 + \cdots + (X_n - \overline{X}_n)^2}{n-1}.$$
Soit $(X_i')_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(m', \sigma^2)$. On suppose que les X_i et les X_i' sont indépendantes. On définit comme précédemment les $\overline{X'}_n$ et S_n'. On pose, pour tout n :
$$T_n = \left(\overline{X_n'} - \overline{X_n}\right)\sqrt{\frac{n}{S_n' + S_n}}.$$
On admet que si $m = m'$, alors T_n suit une loi de Student à $2n-2$ degrés de libertés.

1. Montrer que $\overline{X}_n$ converge avec probabilité 1 vers m.
2. Montrer que S_n converge avec probabilité 1 vers σ^2.
3. Supposons $m \neq m'$. Montrer que $|T_n|$ converge avec probabilité 1 vers l'infini.
4. On se donne deux échantillons $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(x_1', \ldots, x_n')$, le premier issu de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, le deuxième issu de la loi $\mathcal{N}(m', \sigma^2)$. On suppose n suffisament grand. Utiliser ce qui précède pour construire un test statistique pour l'hypothèse $m = m'$.

Exercice 5 : Soit X une variable aléatoire telle que $P(X = 0) = 1/2$ et $P(X = 1/4) = 1/2$. Soit Y une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. On suppose X et Y indépendantes. Calculer $P(X = 0|X + Y \leq 1/2)$.

Exercice 6 : Le support d'une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}^d$ est l'intersection de tous les fermés A tels que $\mu(A) = 1$.

1. Montrer que le support d'une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}^d$ est un fermé de mesure 1 pour μ.
2. Montrer qu'un point x de $\mathbb{R}^d$ appartient au support d'une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}^d$ si et seulement si, pour tout voisinage V de x, $\mu(V)$ est non nul.
3. En déduire que le support de la loi d'un couple de variables aléatoires réelles indépendantes est le produit cartésien des supports des marginales.